

# Çok Taraflı Dolanık Durumların Dönüşümleri

Proje No: **110T335**

Doç. Dr. Sadi Turgut

OCAK 2013

ANKARA

## Önsöz

TÜBİTAK tarafından desteklenen 110T335 numaralı bu projede çok taraflı dolanık durumların yerel işlemlerle dönüşümlerinin bazı özellikleri kuramsal olarak incelenmiştir.

# İçindekiler

<b>1 Giriş</b>	<b>1</b>
1.1 Dolanıklık . . . . .	1
1.2 Kuantum Işınlama ve Yoğun Kodlama . . . . .	2
<b>2 Dolanıklık Dönüşümleri</b>	<b>5</b>
2.1 Asimptotik Dönüşümler . . . . .	5
2.2 Tek Kopya Dönüşümleri . . . . .	6
2.3 SLOCC Sınıfları . . . . .	7
2.4 Tensör Rankı 2 Olan Durumların Dönüşümleri . . . . .	8
2.5 W-Tipi Durumların Dönüşümleri . . . . .	8
<b>3 İki Kübitin Karışık Durumlarının SLOCC Sınıflandırması</b>	<b>10</b>
3.1 Problemin Tanımı . . . . .	10
3.1.1 Saflaştırılmış durumların sınıflandırılmasıyla ilişki . . . . .	11
3.2 Karışık Durumların Destek ve Temsillerinin İncelenmesi . . . . .	11
3.2.1 Matris rankı 1 olan durumlar . . . . .	12
3.2.2 Matris rankı 2 olan durumlar . . . . .	13
3.2.3 Matris rankı 3 olan durumlar . . . . .	15
3.2.4 Tersinir olmayan stokastik dönüşümler . . . . .	15
<b>4 W Sınıfı Durumların Olasılıksal Dönüşümleri</b>	<b>18</b>
4.1 Tek Bir Tarafın Yaptığı Dönüşüm İçin Yeni Monotonlar . . . . .	18
4.2 $x_0 = 0$ Yüzündeki Dönüşümler . . . . .	21
4.2.1 W sınıfı durumlardan çift taraflı dolanık durumların sentezi	22
<b>5 Sonuç</b>	<b>25</b>

# Şekil Listesi

3.1	İki kübitin karışık durumlarının SLOCC sınıflarının şematik gösterimi. Çizgili bölgeler sürekli bir $k$ parametresine bağlı sonsuz sayıda SLOCC sınıfının olduğunu gösteriyor. Çizgisiz bölgelerdeyse tüm küme tek bir SLOCC sınıfı oluşturuyor. Soru işaretleri, henüz bilinmeyen bölgeleri gösteriyor. Çizgili dikdörtgen içinde kalan sınıflar ise tersinir olmayan stokastik dönüşümlerde elde edilebilecek olası don durumların ait olduğu sınıflar. . . . .	16
4.1	$\sigma$ — $\tau$ düzlemindeki yarım daire. . . . .	19
4.2	$\sigma$ — $\tau$ düzlemindeki dönüşüm. İçi boş nokta ilk durumu, diğer iki nokta da olası son durumları gösteriyor. . . . .	21
4.3	Üç kübit için $x_0 = 0$ yüzü bir eşkenar üçgendir. . . . .	22
4.4	Sonsuz adımda gerçekleşen ve çok taraflı W tipi bir durumu üç farklı iki taraflı duruma dönüştüren protokol. . . . .	23

## Özet

Çok taraflı durumumların sadece yerel işlemler ve klasik iletişim yardımıyla (LOCC) dönüştürülmesi probleminin bazı yönleri incelenmiştir. Öncelikle, iki kübitin karışık durumlarının stokastik LOCC (SLOCC) dönüşümleri incelenmiş ve bu sistemdeki stokastik dönüşüm denklik sınıfları ortaya çıkarılmıştır. Bazı denklik sınıflarında SLOCC altında değişmeyen reel parametrelerin var olduğu gözlenmiştir. Bundan sonra  $W$  tipi durumların olasılıksal dönüşümlerinin bazı yönleri incelenmiştir. Tek bir tarafın gerçekleştirdiği dönüşümler için iki boyutlu bir yarım daire içinde değerler alan yeni monotonlar bulunmuştur. Buna ek olarak, deterministik dönüşümler altında maksimal olan durumların oluşturduğu yüz üzerindeki dönüşümler ifade edilmiş ve bunların oldukça basit konveks geometrik yorumları olduğu gösterilmiştir. Daha sonra bu yaklaşım,  $W$  sınıfı bir durumdan çift taraflı dolanık durumların sentezi problemine uyarlanmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Dolanıklık, Çok taraflı dolanıklık, Klasik iletişim yardımıyla yerel işlemler, LOCC, SLOCC, GHZ durumu,  $W$  durumu, Dolanıklık dönüşümleri.

## Abstract

Some aspects of the transformations of entangled states by local operations assisted with classical communication (LOCC) are investigated. First, the stochastic LOCC (SLOCC) classification of mixed states of two qubits is investigated. It is observed that some of the SLOCC classes depend on a continuous real parameter which appears as a SLOCC invariant. The relations of these to the transformations of GHZ type states are explained. After that, some aspects of the probabilistic transformations of W type states are investigated. For transformations carried out by a single party, a new pair of monotones have been identified. These monotones take values in a semicircle and behave in a better way. Also, the transformation rules on the facet of maximally entangled W type states are obtained. On this facet, all transformation rules reduce to a single simple rule that has a nice interpretation in convex geometry. This approach has been applied to the problem of distillation of bipartite states from a W type state.

**Keywords:** Entanglement, Multipartite entanglement, Local operations assisted with classical communication, LOCC, SLOCC, GHZ state, W state, Entanglement transformations.

# Bölüm 1

## Giriş

### 1.1 Dolanıklık

Kuantum kuramının sadece bu kurama özgü kavramlarından birisi ve belki de bunlardan en önemlisi dolanıklıktır. Birden çok sistemin kuantum durumları arasındaki korelasyonu ifade eden dolanıklık, klasik olasılık dağılımlarında gözlemlenemeyecek özellikler içermektedir. Dolanıklığın tarihte ilk defa bir çalışmada yer aldığı Einstein, Podolsky ve Rosen'in klasikleşmiş EPR makalesi de [Einstein *et al.*, 1935] aslında dolanıklığa özgü bu garip korelasyonlarının bir incelemesidir. 1960'lı yıllarda John Bell, bulduğu eşitsizliklerle bu korelasyonları nicelleştirerek bunların klasik korelasyonlardan ne derecede farklı olduğunu göstermiştir [Bell, 1964, Bell, 1993]. Daha sonraki yıllarda yapılan Aspect deneyleri gibi [Aspect *et al.*, 1981, Aspect *et al.*, 1982a, Aspect *et al.*, 1982b] çeşitli deneyler, doğanın da tıpkı kuantum kuramının işaret ettiği şekilde davrandığını, dolayısıyla doğanın da aynı derecede garip, klasik olarak açıklanamayan korelasyonlar içerdiğini göstermiştir.

1990'lı yıllarda ivmelenerek artan kuantum bilgisayarlar ve kuantum bilgi kuramı alanındaki çalışmalar, dolanıklıkla ilgili hem kuramsal hem de deneysel çok sayıda çalışmanın yapılmasına vesile olmuştur. Bu çalışmalardan çıkan belki de en önemli sonuç, dolanıklığın sadece kuantum kuramının ilginç bir parçası olmadığını, aynı zamanda bir takım uygulamalarda da kullanıldığının anlaşılmasıdır. Bu uygulamalardan hiç şüphesiz en önemlisi kuantum bilgisayarlardır. Klasik hesaplama yöntemleriyle çözülmesi zor olan bazı problemler kuantum algoritmalarla daha kolay bir şekilde çözülebilmektedir. Bu algoritmaların ortak özelliği, bilgisayarın temel hafıza elemanları olan kubitlerin, algoritmanın değişik adımlarında, birbirleriyle dolanık duruma girmesidir. Klasik algoritmalardan daha iyi performans sergileyen çoğu kuantum algoritmasında dolanıklık şarttır. Kuantum bilgisayarların gerçekleştirilmesinde de karşılaşılan en önemli problem de, bu dolanık durumların, uyum kaybına (decoherence) uğramadan yeteri kadar uzun bir süre, yani algoritma tamamlanana kadar devam ettirilebilmesidir.

Ama, elbette dolanıklığın en karakteristik yönü, birbirinden uzakta bulunan sistemler arasında da var olabilmesidir. Üstelik, söz konusu sistemlerin çevreyle etkileşimleri bir şekilde engellenirse, bu sistemlerin dolanık olan durumları doğal olarak uzun bir süre devam edebilir. Bu nedenle, aralarında çok büyük mesafeler olan sistemler arasında bile, bu mesafeden bağımsız olarak dolanıklığa özgü

korrelasyonlar geçerlidir. Bu yönüyle dolanıklık bir “kaynak” olarak karşımıza çıkmaktadır. Değişik uygulamalarda kullanılabilen ve böylece harcanabilen, ama istendiği kadar kolay üretilen bir kaynak.

## 1.2 Kuantum Işınlama ve Yoğun Kodlama

Dolanıklığın bir kaynak olarak karşımıza çıktığı en önemli uygulama kuantum ışınlamadır [Bennett *et al.*, 1993]. Işınlamadaki amaç belli bir yerde bulunan bir sistemin kuantum durumunu uzaktaki bir yerde bulunan başka bir sisteme aktarmaktır. Bir sistemin kuantum durumu, bir kuantum bilginin o sisteme kodlanması olarak düşünülebileceği için, bu problem kuantum bilgi-işleminin olağan bir uygulamasıdır. Elbette bu tip durumlarda, söz konusu sistemin bu kuantum durumuna nasıl getirildiğini, yani kodlanan bilginin içeriğini bilmediğimizi varsayıyoruz.

Söz konusu bilgi klasik bir bilgi olsaydı, bunu ölçerek öğrendikten sonra, gelişmiş iletişim araçlarından birini kullanarak istediğimiz herhangi bir yere iletebilirdik. Ama, ölçme sistemin kuantum durumunu değiştireceği, dolayısıyla saklı kuantum bilgiyi yok edeceği için bunu kullanmamız olanaksız. Üstelik, kuantum bilginin kopyasının bile çıkarılmasının mümkün olmadığını ifade eden [Wootters ve Zurek, 1982] bir sonucumuz olduğu için, yapılması gereken tek şey bilgiyi bir sistemden diğerine aktarmaktır. Bunu gerçekleştirmenin bilindik yöntemi, sistemleri birbirleriyle fiziksel etkileşime sokup, sonra da bu etkileşimi dikkatli bir şekilde ayarlayarak bilginin diğer sisteme geçmesini sağlamaktır. Dolayısıyla, daha önce hiç bir iletişimin olmadığı uzak bir yere bir kuantum bilgisini transfer etmek istiyorsak, uygulanabilecek temel yöntem söz konusu kuantum durumunu bir parçacığa aktarıp (bu iş için en uygun parçacıklar fotonlar), bu parçacığı göndermektir. İki yer arasında, bir parçacık alış verişi yardımıyla kuantum bilgisi taşıyan iletişim kanallarına bir *kuantum kanalı* deniyor.

Bazı hallerde kuantum bilgiyi transfer etmek için bir kuantum kanal kullanmak mümkün olmayabilir (örneğin, söz konusu yerler birbirlerinden çok uzakta olabilir, ya da başka nedenlerle bir kuantum kanalın kullanılması engellenmiş olabilir). Eğer, daha önceki bir zamanda bir şekilde dolanık duruma sokulmuş iki sistem bu iki yerde bulunuyorsa, o zaman ışınlama yöntemiyle üçüncü bir sistemin kuantum durumunu herhangi bir kuantum kanal kullanmadan diğer yere transfer etmek mümkün olabilir. Genellikle tartışmalar söz konusu sistemlerin iki düzeyli parçacıklar (kübit) olduğu hal üzerinden yürütülüyor. Dolayısıyla, iki arkadaş Ali ve Berna'nın birbirlerinden çok uzakta bulduklarını, ama bunların ellerindeki A ve B kübitlerinin aşağıdaki dolanık durumda bulunduğunu düşünelim.

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \quad . \quad (1.1)$$

Buna ek olarak, Ali'nin elinde bir başka C kübitinin olduğunu, fakat bunun bilinmeyen

$$|\phi\rangle_C = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (1.2)$$

durumunda bulunduğunu varsayalım. Burada  $a$  ve  $b$  değerleri bilinmeyen sabitlerdir.



CAB kubitlerinin sahip olduğu saf durum şu şekilde ifade edilebilir.

$$|\phi\rangle_C \otimes |\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a|000\rangle + a|011\rangle + b|100\rangle + b|111\rangle) \quad (1.3)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( (|00\rangle + |11\rangle)_{CA} \otimes (a|0\rangle + b|1\rangle)_B \right. \\ \left. + (|00\rangle - |11\rangle)_{CA} \otimes (a|0\rangle - b|1\rangle)_B \right. \\ \left. + (|01\rangle + |10\rangle)_{CA} \otimes (a|1\rangle + b|0\rangle)_B \right. \\ \left. + (|01\rangle - |10\rangle)_{CA} \otimes (a|1\rangle - b|0\rangle)_B \right) \quad (1.4)$$

Bu ifade ışınlanmanın nasıl yapılacağını açıkça göstermekte. Öncelikle Ali, elinde tuttuğu C ve A parçacıkları üzerinde, aşağıda ifadeleri verilen Bell taban durumlarına çökmeyi sağlayacak şekilde bir ölçüm yapar.

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle) \quad , \quad |\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle) \quad . \quad (1.5)$$

Ali'nin yaptığı işlem bir yerel kuantum operasyonu olarak adlandırılıyor. Bu ölçüm sadece Ali'nin fiziksel olarak erişebildiği CA kubitleri üzerinde yapılıyor. Berna'nın elinde bulunan B kübiti ile Ali'nin temas etmesi mümkün değil. Fakat, dolanıklığın doğası gereği B kubitinin durumu da bu işlem sonucu başka bir duruma çöküyor. Dolayısıyla, bu aşamada Berna'nın elindeki B kübiti aşağıdaki 4 olası durumdan birinde

$$a|0\rangle \pm b|1\rangle \quad , \quad a|1\rangle \pm b|0\rangle \quad . \quad (1.6)$$

Ali'nin ölçüm sonucunu bilmeden Berna'nın bu durumu kullanması mümkün değil. Bu nedenle, Ali'nin 4 olası sonuçtan hangisini elde ettiği bilgisini klasik bir iletişim kanalıyla (örneğin telefonla) Berna'ya iletmesi gerekiyor. Berna, bu bilgiye dayalı olarak, elindeki B kübiti üzerine aşağıdaki 4 olası üniter dönüşümden birini uyguluyor.

$$I \quad , \quad \sigma_z \quad , \quad \sigma_x \quad , \quad \sigma_y \quad . \quad (1.7)$$

Sonuçta, B kübiti, C'nin ilk başta sahip olduğu duruma giriyor.

$$|\psi_{son}\rangle_B = a|0\rangle_B + b|1\rangle_B \quad . \quad (1.8)$$

Bu protokolde Ali ve Berna'nın yardımlaşarak yürütebilecekleri işlemlerin hepsine klasik iletişimle destekli yerel kuantum işlemleri (Local Operations assisted with Classical Communication, LOCC) deniyor. Işınlama uygulamasında karşılaştığımız, Ali'nin ölçümü ve Berna'nın üniter dönüşümleri yerel operasyonların; Ali'nin Berna'ya bilgi iletmesiyle klasik iletişimin örneği. Dolanıklığın kullanıldığı uygulamalarda doğal olarak bu türden işlemler söz konusu oluyor. Işınlama, bu işlemlerin basit bir şekilde sıralandığı işlemlere örnek. Daha karmaşık işlemlerde, Ali'nin yanında Berna'nın da ölçüm yapması ve bu ölçümün sonuçlarının Ali'ye iletilmesi, hatta bu türden ölçümlerin Ali ve Berna tarafından sırasıyla ardarda bir çok defa yapılması da mümkün. Çok taraflı dolanık durumların dönüşümlerinde karşımıza çıkan bir olasılık bu.

Yoğun kodlama uygulaması [Bennett ve Wiesner, 1992] ışınlanmanın tam tersi sırada uygulanan bir protokole sahip. Burada da Ali ve Berna başlangıçta bir dolanıklığa sahipler. İstenen şey Ali'nin Berna'ya klasik bir bilgi iletmesi. Ali'nin

elindeki A kübiti iki düzeyli bir sistem olduğu için, normalde bu kübite ancak bir bitlik bir klasik bilgi depolanabilir. Ama, A kübiti B ile dolanık olduğu için, Ali elinde olmasa bile B'nin durumunu belli şekillerde değiştirebilme yeteneğine sahip. Bu durumda da, Ali, fiziksel olarak hiç bir teması olmasa dahi A ve B'nin ortak durumlarını uygun bir şekilde değiştirerek AB sistemine 2 bitlik klasik bilgi kodlayabiliyor. Bundan sonra, Ali elindeki A kübitini bir kuantum iletişim kanalı üzerinden Berna'ya gönderiyor. Dolayısıyla, sadece bir kübit göndererek iki klasik biti karşı tarafa iletmış oluyor. Yoğun kodlamanın önemi, bize dolanıklığın içinde barındırdığı yerel olmayan doğasını göstermesi.

## Bölüm 2

# Dolanıklık Dönüşümleri

Birbirlerinden uzakta bulunan Ali ve Berna'nın ellerinde A ve B parçacıkları olsun. Bu iki parçacık da dolanık bir  $|\Psi\rangle_{AB}$  durumunda bulunsun. Ali ve Berna klasik iletişimle destekli yerel kuantum işlemleri (yani LOCC) kullanarak bu durumu başka bir  $|\Phi\rangle_{AB}$  durumuna dönüştürebilirler mi? Hangi olasılıkla dönüştürürler? Dolanıklık dönüşümlerinin temel konusu bu problemdir. Bu problem dolanıklığın ileride olabilecek uygulamalarında önemli bir yere sahip. Örneğin, ışınlama ve yoğun kodlama gibi dolanıklığın kullanıldığı uygulamalarda sadece maksimal dolanıklığa sahip belli durumlar kullanılabilir. Eğer, AB'nin ilk durumu  $|\Psi\rangle_{AB}$  bu özelliğe sahip değilse, o zaman öncelikle durumun bu özelliğe sahip bir  $|\Phi\rangle_{AB}$  durumuna dönüştürülmesi ihtiyacı doğuyor. Bu ihtiyaç doğal olarak var, çünkü dolanıklığın birbirlerinden uzaktaki kişilere dağıtılma aşamasında parçacıkların yol alacağı kuantum iletişim kanalları gürültü içerebilir. Bu nedenle, saf bir durum gönderilmesine karşın, dağıtım bittiğinde parçacıklar karışık bir  $\rho_{AB}$  durumuna sahip olabilirler. Öyleyse, öncelikle bir saflaştırma işlemi yapılarak [Bennett *et al.*, 1996b], parçacıklar saf bir  $|\Psi\rangle_{AB}$  durumuna indirgenmeli, bundan sonra da  $|\Psi\rangle_{AB}$  durumu istenen  $|\Phi\rangle_{AB}$  durumuna dönüştürülmeli. Gelecekte ihtiyaç olabilecek bu türden dönüşümleri gerçekleştirebilmek için dolanıklık dönüşümlerinin bütün yönlerinin anlaşılması gerektiği açıktır.

Buna ek olarak dönüşümler dolanıklığın bir ölçüsünü elde etmek için temel bir dayanak noktası oluşturuyor. Sadece LOCC kullanarak dolanık olmayan iki parçacığı dolanık bir duruma sokmak mümkün değil; dolanıklık sadece kuantum kanallar yoluyla aktarılabilen bir kaynak. Buna benzer şekilde, sadece LOCC kullanarak iki parçacığın içerdiği dolanıklık miktarını artırmak mümkün değil. Bu anlamda, bu dönüşümlerin sadece dolanıklığı azaltabileceği noktasından hareketle, dolanıklık için bir ölçü elde edildiğini söylüyoruz. Temel olarak, eğer  $|\Psi\rangle$  durumunu  $|\Phi\rangle$  durumuna dönüştürülebiliyorsa, bu halde  $|\Psi\rangle$ 'nin  $|\Phi\rangle$ 'den daha dolanık olduğunu söyleyebiliriz.

### 2.1 Asimptotik Dönüşümler

Bu ölçünün somutlaştığı çeşitli senaryolar söz konusu. Asimptotik senaryoda, Ali ve Berna'nın ellerinde sadece tek bir AB çifti değil, aynı  $|\Psi\rangle$  durumuna sahip olan çok sayıda çift var. Bunlardan da, yine çok sayıda  $|\Phi\rangle$  çiftini yeteri kadar yüksek doğrulukla elde etmek istiyorlar. Bennett ve arkadaşlarının iki

tarafı dolanık durumlar üzerindeki asimptotik dönüşümleri inceledikleri çalışma [Bennett *et al.*, 1996a], bu rejimde sadece tek bir dolanıklık ölçüsü olduğunu gösteriyor. İki tarafı  $|\Psi\rangle_{AB}$  durumunun aşağıdaki şekilde bir Schmidt açılımı olduğunu varsayalım.

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} |\alpha_i\rangle_A \otimes |\beta_i\rangle_B \quad (2.1)$$

Burada,  $\{|\alpha_i\rangle_A\}$ , A'nın Hilbert uzayında bir ortonormal küme,  $\{|\beta_i\rangle_B\}$  ise B'nin Hilbert uzayında bir ortonormal küme ve Schmidt katsayı olarak adlandırılan  $x_i$  değerleriyse pozitif sayılardır. Buradaki terim sayısıysa durumun “Schmidt rankı” veya “tensör rankı” olarak adlandırılmaktadır. Bu durum için dolanıklık entropisi ölçüsü

$$E(\Psi) = \sum_{i=1}^n -x_i \log_2 x_i \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada normalizasyon, bir Bell durumu için ölçü 1 olacak şekilde seçilmiştir. Bu nedenle,  $E(\Psi)$  değeri  $|\Psi\rangle$  durumunun asimptotik rejimde kaç Bell durumuna eşdeğer olduğunu söylemektedir. Asimptotik dönüşüm yaklaşımı uygulama açısından önemli olmasına karşın, sadece saf iki tarafı durumların ölçüsü olarak somut bir formüle sahip. Karışık durumların ve çok tarafı durumların [Bennett *et al.*, 2000] dolanıklığının ölçülmesi söz konusu olduğunda problem matematiksel olarak oldukça karmaşıklaşmaktadır.

## 2.2 Tek Kopya Dönüşümleri

İkinci bir olası senaryo tek kopya dönüşümleri. Yani, Ali ve Berna'nın elinde sadece AB parçacık çifti var. Buna ek olarak, hedef durumun yaklaşık olarak değil, kesin olarak elde edilmesi isteniyor. Lo ve Popescu'nun öncü çalışmasından [Lo ve Popescu, 2001] sonra Nielsen bu türden deterministik dönüşümlerle ilgili sonucu elde etti. Bu dönüşümlerde birden çok sayıda nicelik işin içine giriyor. Öncelikle, Schmidt açılımı (2.1) denklemindeki gibi olan bir  $|\Psi\rangle$  durumu için, Schmidt katsayılarının küçükten büyüğe doğru sıralandığını varsayarsak (yani  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ )

$$F_k(\Psi) = x_1 + x_2 + \dots + x_k \quad , \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

şeklinde bir dizi nicelik tanımlanıyor. Nielsen, bir  $|\Psi\rangle_{AB}$  durumunun,  $|\Phi\rangle_{AB}$  hedef durumuna deterministik olarak (yani % 100 olasılıkla) dönüştürülebilmesi için gerek ve yeter şartın, majorizasyon bağlantıları olarak da adlandırılan

$$F_k(\Psi) \geq F_k(\Phi) \quad , \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.4)$$

şartlarının hepsinin sağlanması olduğunu göstermiştir. Bundan bir süre sonra olasılıksal dönüşümlerle ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Öncelikle, verilen bir  $|\Psi\rangle_{AB}$  durumundan,  $|\Phi\rangle_{AB}$  hedef durumunu elde etme olasılığı

$$p = \min \left( \frac{F_1(\Psi)}{F_1(\Phi)}, \frac{F_2(\Psi)}{F_2(\Phi)}, \dots, \frac{F_n(\Psi)}{F_n(\Phi)} \right) \quad (2.5)$$

olarak bulunmuştur [Vidal, 1999]. Bundan sonra da bütün olasılıksal dönüşüm kuralı elde edilmiştir. Verilen bir  $|\Psi\rangle_{AB}$  durumundan  $p_\alpha$  olasılıkla  $|\Phi_\alpha\rangle_{AB}$  durumları elde edilebilmesi için gerek ve yeter şartın

$$F_k(\Psi) \geq \sum_{\alpha} p_{\alpha} F_k(\Phi_{\alpha}) \quad , \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.6)$$

olduğu gösterilmiştir [Jonathan ve Plenio, 1999].

Bütün bu tek-kopya (deterministik veya olasılıksal) dönüşümlerde protokol yapısı oldukça basittir. Önce Ali bir ölçüm yapar. Sonra, Ali ölçüm sonucunu klasik iletişim kanalını kullanarak Berna'ya iletir. En sonunda da Berna yerel bir üniter dönüşüm gerçekleştirir. Buna alternatif olarak, ilk ölçümü Ali yerine Berna da alabilir. Görüldüğü üzere, iki taraflı dolanık saf durumlar için hem deterministik hem de olasılıksal tek-kopya dönüşüm kuralları tamamen bilinmektedir. Ama, tıpkı asimptotik dönüşümlerde olduğu gibi, burada da sonuçların karışık ve çok taraflı durumlara genişletilmesinde büyük güçlük yaşanmaktadır.

### 2.3 SLOCC Sınıfları

Çok taraflı, yani 3 ya da daha çok sayıda sistemin dolanıklığında daha değişik dolanıklık türleriyle karşılaşmaktadır. Dür ve arkadaşları 3 kübitin çok taraflı durumları arasında birbirlerine LOCC ile dönüştürülemeyecek türde durumlar olduğunu keşfettiler [Dür *et al.*, 2000]. Bu amaçla örnek verilen dolanık durumlardan ilki W-durumu olarak bilinen

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle) \quad (2.7)$$

durumdur. Buna ek olarak Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) durumu olarak adlandırılan

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |111\rangle) \quad (2.8)$$

durumu da [Greenberger *et al.*, 1989] üç kübitin girebileceği olası durumlardan bir diğeri. Dür ve arkadaşları, Ali, Berna ve Cem adındaki üç kişiye dağıtılan A, B ve C kübitlerinin  $|W\rangle$  durumunda olması halinde, bu üç kişinin sadece yerel ölçümler ve klasik iletişim yardımıyla çok küçük bir olasılıkla bile olsa  $|GHZ\rangle$  durumunu elde edemeyeceklerini gösterdiler. Benzer şekilde, eğer ilk durum  $|GHZ\rangle$  ise, bu defa da LOCC ile  $|W\rangle$  durumunu sıfırdan farklı bir olasılıkla elde etmek mümkün değil. Bu iki durum, üç kübitin farklı dolanıklık türlerini temsil ediyorlar.

Dolanık durumlar arasındaki bu türden ilişkiler stokastik dönüşümler olarak adlandırılıyor. Eğer ilgili parçacıkları ellerinde bulunduran kişiler, sadece LOCC ile bir  $|\Psi\rangle$  ilk durumunu,  $|\Phi\rangle$  son durumuna sıfırdan farklı bir olasılıkla dönüştürebiliyorlarsa, bu halde  $|\Psi\rangle$ 'nin  $|\Phi\rangle$ 'ye *stokastik dönüştürülebilir* olduğunu söylüyoruz ve bu ilişkiyi

$$|\Psi\rangle \xrightarrow{SLOCC} |\Phi\rangle$$

ile gösteriyoruz. Eğer hem  $|\Psi\rangle$ ,  $|\Phi\rangle$ 'ye, hem de  $|\Phi\rangle$ ,  $|\Psi\rangle$ 'ye stokastik dönüştürülebiliyorsa, o zaman bu iki durumun *stokastik denk* (ya da SLOCC denk) olduğunu söylüyoruz. Stokastik denklik, bir denklik bağlantısı. Birbirlerine denk

olan bütün durumların oluşturduğu denklik kümesine *SLOCC sınıfı* deniyor. Üç kübit örneğinde,  $|W\rangle$  durumuna denk olan bütün durumlar  $W$  sınıfını,  $|GHZ\rangle$  durumuna denk olan bütün durumlarsa  $GHZ$  sınıfını oluşturuyor.

Birçok açıdan, çok taraflı durumların dönüşümlerinin analizi oldukça zor olduğu için, SLOCC sınıflandırması oldukça iyi bir yöntem. Üç kübit dışında, dört kübitin durumlarının [Verstraete *et al.*, 2002], iki kübitle herhangi bir üçüncü sistemin durumlarının [Miyake ve Verstraete, 2004] ve başka bazı sistemlerin SLOCC denklik sınıflandırması da yapılmıştır.

## 2.4 Tensör Rankı 2 Olan Durumların Dönüşümleri

İki taraflı saf dolanık durumların dönüşümleri, bu durumlar için oldukça standart bir Schmidt gösterimi olduğu için oldukça iyi anlaşılmıştır. Buna karşın, saf olmayan karışık durumlar ile çok taraflı saf (ya da karışık) durumların dönüşümleri konusunda karşılaşılan matematiksel güçlükten kaynaklı olarak büyük eksiklikler vardır. Fakat, basitleştirici bazı özellikleri sağlayan durumlar söz konusu olduğunda, bunların dönüşümleri için yeteri kadar geniş bir genellikte sonuçlar üretilebilmiştir.

Bunlardan birisi, üç kübitin  $GHZ$  sınıfı durumlarının  $p$  kübite genelleştirmesinden oluşan tensör rankı 2 olan durumlar [Turgut *et al.*, 2010]. Bu durumlar sadece iki çarpım durumun süperpozisyonu olarak yazılabiliyorlar ve dolayısıyla bunların dönüşüm kuralları görece kolay. Bu tip durumlar genel olarak şu şekilde ifade edilebilmektedir

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{N} (|\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \dots \otimes \alpha_p\rangle + z |\beta_1 \otimes \beta_2 \otimes \dots \otimes \beta_p\rangle) \quad . \quad (2.9)$$

Burada  $|\Psi\rangle$ ,  $p$  tane kübitin bir durumu ( $p \geq 3$ );  $z$  bir kompleks parametre;  $|\alpha_i\rangle$  ve  $|\beta_i\rangle$ ,  $i$  numaralı kübitin normalize edilmiş durum ketleridir. Söz konusu ketlerin  $c_i = \langle \alpha_i | \beta_i \rangle$  sayısını reel ve negatif olmayan bir sayı yapacak şekilde seçildiği varsayılabilir. Böyle bir açılımdaki  $c_i$  parametresine  $i$ 'inci kübitin kosinüs parametresi deniyor.

Elde edilen sonuçlara göre,  $i$ 'inci kübiti elinde tutan  $i$ 'inci kişi, yaptığı yerel ölçümle sadece  $z$  ve  $c_i$  parametrelerini değiştirebiliyor, buna karşın diğer kübitlerin kosinüs parametrelerini (yani  $j \neq i$  olmak üzere  $c_j$  değerlerini) kesinlikle değiştiremiyor. Görece karmaşık olmasına karşın, gerçekten çok taraflı iki durumun birbirlerine deterministik olarak dönüştürülebilme koşulları kapalı bir formda ifade edilebiliyor.

## 2.5 W-Tipi Durumların Dönüşümleri

Üç kübitin  $W$  durumunun  $p$  kübite genelleştirilmesi ile aşağıdaki durumu elde ederiz,

$$|W_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{p}} (|10 \dots 0\rangle + |01 \dots 0\rangle + \dots + |00 \dots 1\rangle) \quad . \quad (2.10)$$

Bu durumdan stokastik olarak elde edilebilir tüm durumlara  $p$  kübitin  $W$ -tipi durumları deniyor. Böyle bir durum, kübitlerin Hilbert uzaylarındaki bazların

yeniden tanımlanmasıyla, şu şekilde ifade edilebilir,

$$|\Phi(\mathbf{x})\rangle = \sqrt{x_0}|00\cdots 0\rangle + \sqrt{x_1}|10\cdots 0\rangle + \sqrt{x_2}|01\cdots 0\rangle + \cdots + \sqrt{x_p}|00\cdots 1\rangle . \quad (2.11)$$

Burada,  $x_0, x_1, \dots, x_p$  negatif olmayan reel sayılar ve  $\mathbf{x}$  sembolü  $p$  boyutlu reel uzayda  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  noktasını temsil ediyor.  $|\Phi(\mathbf{x})\rangle$  durumunun normallizasyon koşulu ile  $x_0 = 1 - (x_1 + \cdots + x_p)$  olarak ifade edilebilir.

Böylece  $|\Phi(\mathbf{x})\rangle$  durumunu  $p$ -boyutlu uzayda bir  $p$ -simpleksin noktaları ile eşleştiriyoruz. Bu gösterimin en iyi tarafı, eğer durum iki taraflı bir dolanık durum değil ise, duruma karşılık gelen  $\mathbf{x}$  noktasının biricik olması. Bu, dolanıklık dönüşümleriyle ilgili çalışmayı kolaylaştıran bir nitelik [Kıntaş ve Turgut, 2010]. Elde edilen sonuçlara göre, gerçekten çok taraflı durumlar olmak kaydıyla  $|\Phi(\mathbf{x})\rangle$  durumunun  $|\Phi(\mathbf{x}')\rangle$  durumuna deterministik olarak dönüştürülebilme gerek ve yeter şartı

$$x_i \geq x'_i \quad (\text{bütün } i = 1, 2, \dots, p \text{ için}) \quad (2.12)$$

olarak bulunmuştur.

Bunun dışında, tek bir tarafın yaptığı yerel kuantum operasyonları için de basit bir kural yazılabilmektedir. Eğer,  $k$  numaralı kübite elinde bulunduran taraf, durum  $|\Phi(\mathbf{x})\rangle$  iken yapacağı bir yerel ölçüm ile  $p_\lambda$  olasılıklarıyla  $|\Phi(\mathbf{x}_\lambda)\rangle$  durumlarını elde etmek istiyorsa, böyle bir dönüşümü ancak ve ancak şu koşullar sağlandığında gerçekleştirebilir: Her  $\lambda$  için pozitif bir  $s_\lambda$  sayısı vardır öyle ki

$$\sum_{\lambda} p_{\lambda} s_{\lambda} = 1 , \quad (2.13)$$

$$x_{\lambda, \ell} = s_{\lambda} x_{\ell} \quad (\text{her } \ell \neq k \text{ için}), \quad (2.14)$$

$$\sum_{\lambda} p_{\lambda} \sqrt{s_{\lambda} x_{\lambda, 0}} \geq \sqrt{x_0} . \quad (2.15)$$

Bu bağlantılar yardımıyla W tipi durumlar için dolanıklık dönüşümlerini incelemek kolaylaşmaktadır. Ama, her ne kadar deterministik dönüşümlerin koşullarını böylece elde etmek mümkün olsa da, olasılıksal ölçümler ya da son durumlar arasında iki taraflı bir durumunun olduğu hallerin incelenmesi hala matematiksel olarak oldukça karışıktır.

## Bölüm 3

# İki Kübitin Karışık Durumlarının SLOCC Sınıflandırması

İki taraflı saf durumlar için SLOCC sınıflandırması oldukça basittir. Durumun Schmidt açılımındaki terim sayısı, yani Schmidt rankı ile SLOCC sınıfları arasında bire bir ilişki vardır. Buna göre, aynı Schmidt rankına sahip iki durum birbirlerine sıfırdan farklı olan bir olasılıkla dönüştürülebilir. Buna ek olarak, herhangi bir durum Schmidt rankı daha küçük olan herhangi başka bir duruma geri dönülemez bir biçimde indirgenebilir. Saf olan durumların tersine, karışık olan durumlar için sınıflandırma o kadar basit değil. Aşağıda, sadece iki kübit söz konusu olduğunda karışık durumların sınıflandırması incelenmektedir.

### 3.1 Problemin Tanımı

Ali ve Berna birbirlerinden uzakta bulunan iki kişi olsun. Ali'nin elinde bir A kübiti, Berna'nın elinde de bir B kübiti olsun. Bu iki kübitin  $\rho_{AB}$  yoğunluk operatörüyle göstereceğimiz bir durumu düşünelim. Ali ve Berna, sadece kendi kübitleri üzerinde yerel ölçümler yapabiliyor ve ölçüm sonuçlarını klasik iletişimle diğerine bildirebiliyor (yani, LOCC olarak nitelediğimiz dönüşümleri yapıyorlar). Eğer, sadece durumlar arasındaki stokastik dönüştürülebilme bağlantısıyla ilgileniyorsak, o zaman klasik iletişimin bu problemde herhangi bir fonksiyonu yoktur. Ali ve Berna'nın, ellerinde bulunan kübitlerin durumunu başka bir  $\rho'_{AB}$  durumuna stokastik dönüştürebilmeleri için gerek ve yeter şart şöyledir: A ve B kübitlerinin Hilbert uzayları üzerine etkiyen öyle bir  $P = P_A$  ve bir  $Q = Q_B$  operatörü vardır ki

$$\rho'_{AB} = (P \otimes Q)\rho_{AB}(P^\dagger \otimes Q^\dagger) \quad (3.1)$$

bağlantısı sağlanmaktadır.

Bu  $\rho'_{AB}$  durumu için, sadece A'nın fiziksel özellikleriyle ilgilendiğimizde kullanabileceğimiz indirgenmiş yoğunluk matrisi,  $\rho_A = \text{tr} \rho_{AB}$  şeklinde, B için olan  $\rho_B$  matrisi de benzer şekilde tanımlanmaktadır. Eğer, ilgili Hilbert uzayları,  $\rho_A$  ve  $\rho_B$  tam ranka sahip şekilde seçilirse,  $P$  operatörünün tersinin var olması şartı



ile  $\rho'_A$  matrisinin tam ranka sahip olma şartı eşdeğerdir. Benzer şekilde  $Q$ 'nun tersinin olması da  $\rho'_B$ 'nin tam ranka sahip olmasına denktir. Bu nedenle, eğer denklem (3.1)'deki dönüşüm tersinebilir ise  $P$  ve  $Q$  operatörlerinin tersinir olması şarttır. Bu şartın dönüşümün tersinir olmasını doğal olarak gerektirdiği açık. Bu nedenle,  $\rho_{AB}$  ve  $\rho'_{AB}$  durumlarının SLOCC denk olmaları için gerek ve yeter şart denklem (3.1)'i sağlayan tersinir  $P$  ve  $Q$  operatörlerinin bulunabilmesidir. Böyle bir durumda,  $\rho_{AB}$  ve  $\rho'_{AB}$  operatörlerinin matris rankları da eşit olacaktır. Yani bu üç rank SLOCC denklik sınıflarının değişmezlerinden bazılarıdır. Bu türden değişmezlerin teşhisi analizi genel olarak kolaylaştırmaktadır.

### 3.1.1 Safaştırılmış durumların sınıflandırılmasıyla ilişki

A ve B kubitlerinin herhangi bir  $\rho_{AB}$  karışık durumu, daha büyük bir ABC sisteminin saf bir durumu olarak temsil edilebilir. Burada C, ancilla olarak adlandırılan, yeterince fazla sayıda düzeyi olan, çoğunlukla hayali, üçüncü bir sistemdir. Kısacası, ABC sistemi için  $|\Psi\rangle_{ABC}$  ile göstereceğimiz bir saf durum bulabiliriz öyle ki C sistemi gözardı edildiğinde AB için elde edilen indirgenmiş yoğunluk matrisi  $\rho_{AB}$ 'yi versin. Yani,

$$\rho_{AB} = \text{tr}_C (|\Psi\rangle\langle\Psi|)_{ABC} \quad . \quad (3.2)$$

Burada  $|\Psi\rangle_{ABC}$  safaştırılmış durum olarak adlandırılıyor. Tek bir safaştırılmış durum yok. Fakat, bütün olası safaştırılmış durumlar C sistemi üzerinde bir üniter operasyonla birbirlerine dönüştürülebilir. AB'nin karışık durumlarının stokastik dönüşüm bağlantısı, safaştırılmış durumlar aracılığıyla da ifade edilebilir. Eğer  $|\Psi\rangle_{ABC}$  durumu  $\rho_{AB}$  karışık durumunun bir safaştırması ve  $|\Psi'\rangle_{ABC}$  durumu da  $\rho'_{AB}$  karışık durumunun bir safaştırmasıysa, o zaman  $\rho_{AB}$ 'nin  $\rho'_{AB}$ 'ye stokastik dönüştürülebilmesi için gerek ve yeter şart,

$$|\Psi'\rangle_{ABC} = (P \otimes Q \otimes U) |\Psi\rangle_{ABC} \quad . \quad (3.3)$$

denklemini sağlanacak şekilde C üzerinde bir yerel üniter  $U = U_C$  ve A ile B üzerinde yerel  $P = P_A$ ,  $Q = Q_B$  operatörlerinin bulunabilmesidir. Eğer  $|\Psi\rangle_{ABC}$  ve  $|\Psi'\rangle_{ABC}$  safaştırıcı durumları birbirlerinden bağımsız ve rastgele bir biçimde seçilmişse, o zaman C üzerine etkiyen bir üniter  $U$  operatörünün kullanılması genel olarak zorunlu hale gelir. Yukarıdakine benzer şekilde, eğer  $\rho_{AB}$  ile  $\rho'_{AB}$  birbirlerine SLOCC denk ise, bu defa  $P$  ve  $Q$  operatörlerinin tersinir olmalarını şart koşmalıyız.

Yukarıdaki bağlantıdan dolayı, AB karışık durumlarının SLOCC sınıfları, ABC saf durumlarının SLOCC sınıflarının alt kümeleridir. Dolayısıyla, iki kubitin karışık durumlarının SLOCC sınıflandırması, doğal olarak  $2 \times 2 \times n$  sistemlerin saf durumlarının SLOCC sınıflandırmasıyla [Miyake ve Verstraete, 2004] yakından ilişkili.

## 3.2 Karışık Durumların Destek ve Temsillerinin İncelenmesi

A ve B kubitlerinin iki boyutlu Hilbert uzaylarını  $\mathcal{H}_A$  ve  $\mathcal{H}_B$  sembolleriyle gösterelim.  $\rho_{AB}$ , bu iki kubitin karışık bir durumu olsun. Eğer  $\rho_{AB}$ 'nin matris rankı

$r$  ise ( $1 \leq r \leq 4$ ), o zaman  $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  uzayı içinde aşağıdaki denklemi sağlayacak  $r$  tane  $|\varphi_i\rangle = |\varphi_i\rangle_{AB}$  vektörü bulunabilir:

$$\rho_{AB} = \sum_{i=1}^r |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i| \quad . \quad (3.4)$$

Eğer bu koşul sağlanırsa,  $|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_r\rangle$  vektör listesinin  $\rho_{AB}$  için bir temsil oluşturduğunu söyleyeceğiz. Bu özelliği sağlayan tek bir temsil yok, ama Schrödinger-HJW teoremi denilen oldukça güçlü bir sonuç farklı temsiller arasındaki ilişkiyi basit bir şekilde ifade etmemize olanak sağlıyor. Eğer  $\rho_{AB}$  durumunun başka bir temsili

$$\rho_{AB} = \sum_{i=1}^r |\tilde{\varphi}_i\rangle \langle \tilde{\varphi}_i| \quad (3.5)$$

şeklindeyse, o zaman  $r \times r$  boyutunda bir  $U$  üniter matrisi için  $|\tilde{\varphi}_i\rangle = \sum_{j=1}^r U_{ij} |\varphi_j\rangle$  bağlantısı sağlanır.

Bu temsillerin SLOCC sınıflandırması açısından önemi şöyle açıklanabilir. Birbirlerine denklem (3.1) bağlantısıyla bağlı  $\rho_{AB}$  ve  $\rho'_{AB}$  gibi SLOCC denk iki karışık durumumuz olsun. Eğer  $|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_r\rangle$  vektör listesi  $\rho_{AB}$  için bir temsil oluşturuyorsa, o zaman

$$|\varphi'_i\rangle = (P \otimes Q) |\varphi_i\rangle \quad . \quad (3.6)$$

ile tanımlanan vektörlerin oluşturduğu  $|\varphi'_1\rangle, \dots, |\varphi'_r\rangle$  listesi de  $\rho'_{AB}$  için bir türetilmiş temsil oluşturur.

Temel amacımız, her olası karışık durum için işleri basitleştirici özel bir temsil seçmek. Bunun için, türetilme bağlantısının bir özel temsili başka bir özel temsile taşıyabilmesi gerekir. Bu şartları sağlayan bir temsil var. Eğer  $|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_r\rangle$  temsiline ilk  $r - 1$  vektör çarpım ise, o zaman türetilme altında bu özelliğin değişmeyeceği bellidir. Bunu yapabilmek her zaman mümkündür. Bunun temel nedeni,  $\mathcal{H}_{AB}$ 'nin herhangi bir 2-boyutlu altuzayında mutlaka bir çarpım durum olabilmesi. Uygun bir üniter matris seçerek, temsilin birinci vektörü olan  $|\varphi_1\rangle$ 'ı  $\rho_{AB}$ 'nin destek uzayındaki (yani,  $\rho_{AB}$ 'nin özvektörlerinin oluşturduğu altuzay) herhangi bir vektöre paralel olacak şekilde ayarlamak mümkün. Bu işlemi devam ettirerek, istenen özellikleri sağlayan bir temsilin her zaman bulunabileceğini görebiliriz.

Şimdi, bu türden temsilleri kullanarak SLOCC sınıflarını bulmaya çalışacağız.

### 3.2.1 Matris rankı 1 olan durumlar

Eğer  $\rho_{AB}$ 'nin rankı 1 ise, o zaman söz konusu durum bir saf durumdur. İki olasılık var. Ya durum bir çarpım durumdur, ya da dolanık bir durumdur. Her iki olasılığın kendi başına bir SLOCC sınıfı oluşturduğu biliniyor. Dolayısıyla, aşağıya bu iki sınıfı yazabiliriz.

- **Saf Çarpım:**  $\rho_{AB} = |\varphi_1\rangle \langle \varphi_1|$  ve  $|\varphi_1\rangle$  bir çarpım durum.
- **Saf Dolanık:**  $\rho_{AB} = |\varphi_1\rangle \langle \varphi_1|$  ve  $|\varphi_1\rangle$  dolanık bir durum.

### 3.2.2 Matris rankı 2 olan durumlar

Eğer rank 2 ise, dört değişik olasılık söz konusu. Bunlardan iki tanesinde  $\rho_A$  ve  $\rho_B$  indirgenmiş yoğunluk matrislerinden birinin rankı 1 olduğu için oldukça basit sınıflar elde ediliyor. Her iki halde ayrı bir SLOCC sınıfı elde ediyoruz.

- **Saf A, karışık B:**  $\rho_{AB} = (|\alpha\rangle\langle\alpha|)_A \otimes \sigma_B$  şeklinde. Burada  $|\alpha\rangle$ , A'nın saf bir durumu ve  $\sigma$ , B'nin karışık bir durumu.
- **Karışık A, saf B:**  $\rho_{AB} = \sigma_A \otimes (|\beta\rangle\langle\beta|)_B$  şeklinde. Burada da  $\sigma$ , A'nın karışık bir durumu ve  $|\beta\rangle$ , B'nin saf bir durumu.

Her iki durumda da  $\rho_{AB}$  dolanık değil.

Kalan diğer iki olasılık,  $\rho_{AB}$ 'nin destek altuzayı olan  $\text{supp}(\rho_{AB})$ 'deki çarpım durumların sayısına bakarak incelenebilir.

- **W':**  $\text{supp}(\rho_{AB})$  içinde birbirlerine paralel olmayan sadece bir tane çarpım durumu bulunabilir. Bu tip bir durumda, saflaştırılmış durum W sınıfındadır. Bu özelliği sağlayan bütün karışık durumların bir SLOCC sınıfı oluşturduğu aşağıda gösterilmektedir.
- **GHZ':**  $\text{supp}(\rho_{AB})$  içinde birbirlerine paralel olmayan iki tane çarpım durumu bulunabilir. Bu tip bir durumda, saflaştırılmış durum GHZ sınıfındadır. Burada, bu özelliği sağlayan sonsuz tane SLOCC sınıfı olduğu gösterilecektir.

Eğer  $\text{supp}(\rho_{AB})$  birbirine paralel olmayan sadece 1 çarpım durumu içeriyorsa, o zaman  $\rho_{AB}$  durumunun aşağıdaki özellikleri sağlayan bir  $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle$  temsili bulmak mümkündür. A ve B'nin Hilbert uzaylarında öyle vektörler bulabiliriz ki

$$|\varphi_1\rangle = |\alpha_1\rangle_A \otimes |\beta_1\rangle_B \quad , \quad (3.7)$$

$$|\varphi_2\rangle = |\alpha_1\rangle_A \otimes |\beta_2\rangle_B + |\alpha_2\rangle_A \otimes |\beta_1\rangle_B \quad , \quad (3.8)$$

bağlantıları sağlansın. Schrödinger-HJW teoremini kullanarak bu özellikleri sağlayan tek bir temsil olduğunu gösterebiliriz.

Eğer  $\rho'_{AB}$  aynı özelliklere sahip bir başka karışık durumsa (yani  $\text{supp}(\rho'_{AB})$  içinde birbirlerine paralel olmayan sadece 1 çarpım durumu varsa), o zaman

$$|\varphi'_1\rangle = |\alpha'_1\rangle_A \otimes |\beta'_1\rangle_B \quad , \quad (3.9)$$

$$|\varphi'_2\rangle = |\alpha'_1\rangle_A \otimes |\beta'_2\rangle_B + |\alpha'_2\rangle_A \otimes |\beta'_1\rangle_B \quad . \quad (3.10)$$

bağlantıları sağlanacak şekilde yeni  $|\varphi'_1\rangle, |\varphi'_2\rangle, |\alpha'_i\rangle$  and  $|\beta'_i\rangle$  vektörleri bulabiliriz. Bu noktadan sonra,  $P_A$  and  $Q_B$  operatörlerinin  $P|\alpha_i\rangle = |\alpha'_i\rangle$  and  $Q|\beta_i\rangle = |\beta'_i\rangle$  ( $i = 1, 2$ ) koşullarını sağlayacak şekilde tanımlayabilir ve (3.1) denkleminin sağlandığını görebiliriz. Kısacası, saflaştırılmış halleri W sınıfında olan herhangi iki karışık durum SLOCC denktir.

Eğer  $\text{supp}(\rho_{AB})$  birbirine paralel olmayan iki çarpım durumu içeriyorsa: O zaman destek içinde  $|\alpha_1\rangle \otimes |\beta_1\rangle$  ve  $|\alpha_2\rangle \otimes |\beta_2\rangle$  gibi iki çarpım durumu bulabiliriz. Eğer  $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle$  ilk vektörü bir çarpım olan bir temsilse, o zaman bu çarpım vektörü bu iki vektörden biridir. İlki olduğunu varsayarsak, bu temsilin vektörlerini şu şekilde ifade edebiliriz,

$$|\varphi_1\rangle = x_1 |\alpha_1\rangle_A \otimes |\beta_1\rangle_B \quad , \quad (3.11)$$

$$|\varphi_2\rangle = x_2 |\alpha_1\rangle_A \otimes |\beta_1\rangle_B + x_3 |\alpha_2\rangle_A \otimes |\beta_2\rangle_B \quad , \quad (3.12)$$

Burada  $x_i$  bazı kompleks sayılardır. Şimdi,  $|\alpha_1\rangle_A$  ve  $|\alpha_2\rangle_A$  vektörlerini yeniden tanımlayarak  $x_1 = x_3 = 1$  seçebiliriz. Buna ek olarak,  $|\varphi_2\rangle$  vektörünün faz faktörünü yeniden tanımlayarak  $x_2$  sayısını da reel ve negatif olmayan bir biçimde seçebiliriz. Tüm bu işlemlerin sonucunda, temsili, uygun tek kübit vektörleri cinsinden

$$|\varphi_1\rangle = |\alpha_1\rangle_A \otimes |\beta_1\rangle_B \quad , \quad (3.13)$$

$$|\varphi_2\rangle = k |\alpha_1\rangle_A \otimes |\beta_1\rangle_B + |\alpha_2\rangle_A \otimes |\beta_2\rangle_B \quad , \quad (3.14)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada  $k$  reel bir sayı ( $k \geq 0$ ). Bu aşamadan sonra, ne yaparsak yapalım  $k$  sayısından ne kurtulabiliyoruz, ne de onu değiştirebiliyoruz. Üstelik, yukarıdaki ifadelerden bu sayının SLOCC değişmezi olduğunu da hemen görmek mümkün.

Buna ek olarak, bu sayı seçtiğimiz özel temsilden de bağımsız. Bunun için  $|\tilde{\varphi}_1\rangle, |\tilde{\varphi}_2\rangle$  vektörlerinin, ilk vektör çarpım olacak şekilde başka bir temsil oluşturduğunu varsayalım. Elbette bu çarpım vektörü, olası iki çarpım vektöründen biri. Eğer bu ilk çarpım vektörü ise, yani  $|\tilde{\varphi}_1\rangle$  vektörü  $|\alpha_1 \otimes \beta_1\rangle$  vektörüne paralelse, o zaman her iki temsilin vektörlerinin birbirlerinin aynı olduğunu, sadece faz faktörlerinin farklı olabileceğini gösterebiliriz. Eğer ikinci olasılık söz konusuysa, yani  $|\tilde{\varphi}_1\rangle$  vektörü  $|\alpha_2 \otimes \beta_2\rangle$  vektörüne paralelse, o zaman Schrödinger-HJW teoremi gereği,  $2 \times 2$  bir üniter  $V$  matrisiyle bu iki temsili bağlayabiliriz:

$$|\tilde{\varphi}_i\rangle = \sum_j V_{ij} |\varphi_j\rangle \quad (3.15)$$

İlk vektör üzerindeki koşul gereği, bu matris ancak

$$V = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \begin{bmatrix} -k & 1 \\ 1 & k \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

olabilir. Burada gereksiz faz faktörleri basitleştirilmiştir. Bu durumda yeni temsil

$$|\tilde{\varphi}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} |\alpha_2\rangle_A \otimes |\beta_2\rangle_B \quad , \quad (3.17)$$

$$|\tilde{\varphi}_2\rangle = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} |\alpha_2\rangle_A \otimes |\beta_2\rangle_B + \sqrt{1+k^2} |\alpha_1\rangle_A \otimes |\beta_1\rangle_B \quad , \quad (3.18)$$

şeklinde ifade edilebilir. İlgili tek kübit vektörlerinin yeniden tanımlanmasıyla yine aynı  $k$  değerini elde ediyoruz. Yani, bu tür karışık durumların değişik vektörlerle iki değişik temsili var, ama her iki durumda da  $k$  değeri aynı kalıyor.

Son olarak, aynı  $k$  değerine sahip iki karışık durumun birbirlerine SLOCC denk olduğunu göstermek gerekiyor. Ama, bir defa temsiller bulduktan sonra,  $P$  ve  $Q$  operatörlerini yukarıdaki örnekte olduğu gibi tanımlamak ve ondan sonra da dönüşüm kuralının sağlandığını göstermek gerekiyor. Adımlar aynı olduğu için, bu tartışma tekrarlanmamıştır.

Son olarak,  $k$  değerinin SLOCC değişmezi olması sonucunu bir de saflaştırılan üç kübit durumu açısından görmek yararlı olacaktır. Yukarıdaki (3.13,3.14) denklemlerinden saflaştırıcı durumun bir GHZ sınıfı durum olduğu açık. Bu durumlar için denklem (2.9)'deki gibi genel bir temsilimiz var. Bu temsillerde ortaya çıkan üç kosinüs parametresi var. Bu tür durumların dönüşüm kuralına göre, Ali ve Berna sadece kendi parçacıklarının kosinüs parametrelerini

değiştirebiliyor ama hayali C parçacığınınkini değiştiremiyorlar. Öyleyse, yani C parçacığına sadece üniter dönüşümler uygulamıyorsa, o zaman bu parçacığın kosinüsü bir değişmezdir. Eğer  $c_C = \cos \gamma_C$  dersek, o zaman  $k = \cot \gamma_C$  olduğunu görürüz. Dolayısıyla, iki temsildeki değişmez nicelikler temel olarak aynıdır.

### 3.2.3 Matris rankı 3 olan durumlar

Matris rankı 3 olan  $\rho_{AB}$  durumlarını oldukça basit bir şekilde sınıflandırabiliriz. Burada  $\text{supp } \rho_{AB}$  destek altuzayı 3 boyutlu olduğu için, bu altuzaya dik altuzay, yani  $(\text{supp } \rho_{AB})^\perp$  sadece 1-boyutludur. O halde, bu uzaydaki bir vektör ya çarpım olmalı ya da dolanık olmalıdır. Bu iki tür altuzay, stokastik dönüşümler altında türünü korumaktadır. Bu nedenle, SLOCC için bir ön sınıflandırma adına yoğunluk matrislerinin aşağıda belirtilen iki türünü yazabiliriz.

- $\mathbf{P}^\perp$ :  $(\text{supp } \rho_{AB})^\perp$  uzayının bir çarpım vektörü içerdiği tür durumlar.
- $\mathbf{E}^\perp$ :  $(\text{supp } \rho_{AB})^\perp$  uzayının dolanık bir vektör içerdiği tür durumlar.

Yukarıdakilerden sadece ilk tür için karışık yoğunluk matrisleri için standart bir temsil bulmak mümkün olabilmıştır. Böylece, bu tür için reel bir  $k$  parametresine bağlı SLOCC sınıflarının olduğu gösterilebilir.

Öncelikle  $\mathbf{P}^\perp$  türü bir yoğunluk matrisi için, destek altuzayı  $\text{supp } \rho_{AB}$ 'nin aşağıdaki özellikleri sağladığı gösterilebilir.

1. Öyle bir  $|\alpha_1\rangle_A$  vektörü vardır ki,  $|\alpha_1\rangle_A \otimes \mathcal{H}_B$  desteğin bir altuzayıdır.
2. Öyle bir  $|\beta_1\rangle_B$  vektörü vardır ki,  $\mathcal{H}_A \otimes |\beta_1\rangle_B$  desteğin bir altuzayıdır.
3. Yukarıdaki iki altuzayın kesişimi de desteğin 1-boyutlu bir altuzayıdır. Bu alt-uzay  $|\alpha_1 \otimes \beta_1\rangle$  çarpım vektörünü içermektedir.

Bunlar tespit edildikten sonra,  $\rho_{AB}$  için kullanılacak temsilin belirlenmesi kolaylaşmaktadır. Öncelikle,  $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle$  temsiline ilk vektörü  $|\alpha_1 \otimes \beta_1\rangle$  çarpım vektörüne paralel seçebiliriz. İkinci olarak,  $|\varphi_2\rangle$  çarpım vektörünü  $|\alpha_1\rangle_A \otimes \mathcal{H}_B$  altuzayının içinde seçebiliriz. Son vektör için artık bir seçim şansımız kalmaz. Kübitlerin içinde bulabileceğimiz vektörleri yeniden tanımlayarak, aşağıda verilen temsile ulaşırız.

$$|\varphi_1\rangle = |\alpha_1\rangle_A \otimes |\beta_1\rangle_B \quad , \quad (3.19)$$

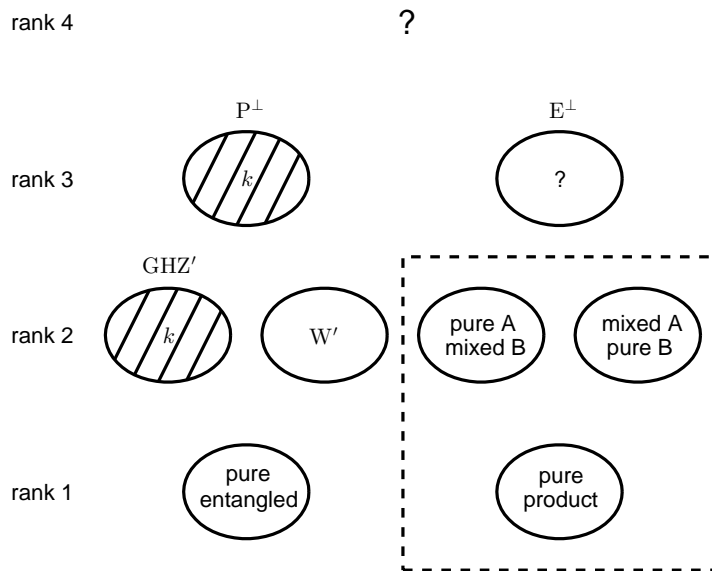
$$|\varphi_2\rangle = |\alpha_1\rangle_A \otimes |\beta_2\rangle_B \quad , \quad (3.20)$$

$$|\varphi_3\rangle = k |\alpha_1\rangle_A \otimes |\beta_2\rangle_B + |\alpha_2\rangle_A \otimes |\beta_1\rangle_B \quad . \quad (3.21)$$

Burada  $k$  reel ve negatif olmayan bir sayı. Bu sayıyı, yeniden tanımlamalarla yok etmenin ya da değerini değiştirmenin imkanı yok. Üstelik bu da bir SLOCC değişmezi. Dolayısıyla  $\mathbf{P}^\perp$  türü yoğunluk matrisleri reel bir  $k$  parametresine bağlı sonsuz sayıda SLOCC sınıfına sahip. Yine yukarıdaki şekilde, aynı  $k$  değerine sahip iki yoğunluk matrisinin birbirlerine SLOCC denk olduğu gösterilebilir.

### 3.2.4 Tersinir olmayan stokastik dönüşümler

Son olarak, tersinir olmayan stokastik dönüşümler altında sınıfların nasıl değiştiğini belirtmekte yarar var. Bu tür dönüşümlerde denklem (3.1)'deki  $P$  ve  $Q$



Şekil 3.1: İki kübitin karışık durumlarının SLOCC sınıflarının şematik gösterimi. Çizgili bölgeler sürekli bir  $k$  parametresine bağlı sonsuz sayıda SLOCC sınıfının olduğunu gösteriyor. Çizgisiz bölgelerdeyse tüm küme tek bir SLOCC sınıfı oluşturuyor. Soru işaretleri, henüz bilinmeyen bölgeleri gösteriyor. Çizgili dikdörtgen içinde kalan sınıflar ise tersinir olmayan stokastik dönüşümlerde elde edilebilecek olası don durumların ait olduğu sınıflar.

operatörlerinden biri tersinir değil, yani matris rankı 1. Hal böyle olunca, son  $\rho'_{AB}$  durumuna ait indirgenmiş yoğunluk matrislerinden birinin de (veya her ikisinin de) rankı 1 olmalı. Bu şekilde olası üç sınıf var. Her üçü de, matris rankı 2 veya daha fazla olan bütün olası durumların dönüşümleri sonucu elde edilebilir.

Sonuç olarak, elimizde iki kübitin karışık durumlarının SLOCC sınıflandırması için tam olmayan ama bazı kısımları iyi bilinen bir resim var (Şekil 3.1). Bu sınıflardan bazılarının sürekli bir parametreye bağlı olarak çıkması ilginç bir sonuç. Ama, yukarıda belirtildiği gibi, en azından GHZ' sınıfları için, bu hayali sistem üzerinde ölçüm türü çökmeye yol açabilecek işlemlerin olmaması, bununla bağlantılı olarak da korunan sürekli bir parametrenin varlığıyla açıklanabilir.

## Bölüm 4

# W Sınıfı Durumların Olasılıksal Dönüşümleri

Birbirlerinden uzakta  $p$  kişiye dağıtılmış  $p$  kübitin aşağıdaki formda ifade edilebilen durumlarını düşünelim

$$|\Phi(\mathbf{x})\rangle = \sqrt{x_0}|00\cdots 0\rangle + \sqrt{x_1}|10\cdots 0\rangle + \sqrt{x_2}|01\cdots 0\rangle + \cdots + \sqrt{x_p}|00\cdots 1\rangle . \quad (4.1)$$

Burada  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ ,  $\mathbb{R}^p$  uzayında yer alan ve köşeleri  $(0, 0, \dots, 0)$ ,  $(1, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 1, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(0, 0, \dots, 1)$  konumlarında bulunan simpleks içinde bir noktadır. Bu  $p$  kübiti ellerinde bulunduran kişilerin gerçekleştirdikleri yerel operasyonlar sonucu durum aynı niteliğini koruyacak,  $\mathbf{x}$  parametresi de bu simpleks içinde belli bir dağılıma sahip olacaktır. İdeal amaç, LOCC ile gerçekleştirilen dönüşümler ile simpleks içindeki herhangi bir noktadan başlayarak hangi dağılımların elde edilebileceğini saptamaktır. Fakat, tek bir kişinin elde ettiği dönüşümü karakterize edebilmemize rağmen, bütün kişilerin ortaklaşa operasyonları sonucu elde edebilecekleri dağılım hakkında tam bir karakterizasyon mümkün olamamıştır. Sadece bu dağılımın belli yönleri incelenebilmiştir. Aşağıda, bu problem hakkında yapılan çalışmaların sonuçları özetlenmiştir.

### 4.1 Tek Bir Tarafın Yaptığı Dönüşüm İçin Yeni Monotonlar

Eğer sadece  $k$  numaralı kübit üzerinde yapılan bir yerel ölçüm,  $p_\lambda$  olasılıkla  $|\Phi(\mathbf{x}_\lambda)\rangle$  durumlarının elde edilmesine yol açmışsa, o zaman her  $\lambda$  sonucu için bir  $s_\lambda$  ölçekleme parametresinin var olduğu ve aşağıdaki özellikleri sağladığı bilinmektedir [Kıntaş ve Turgut, 2010].

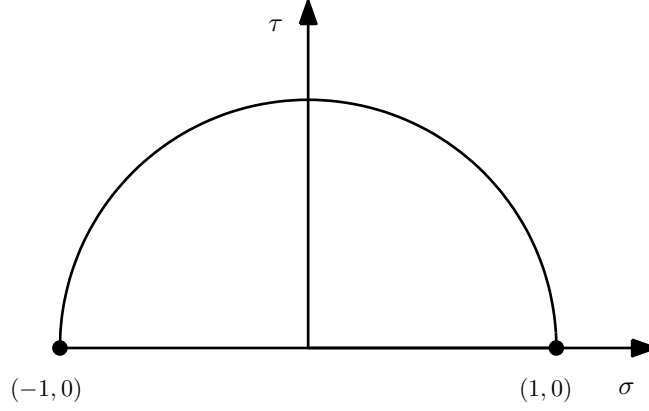
$$\overline{s_\lambda} = 1 , \quad (4.2)$$

$$\overline{\sqrt{s_\lambda x_{\lambda,0}}} \geq \sqrt{x_0} . \quad (4.3)$$

Burada, ölçekleme parametresi,  $\mathbf{x}$ 'in diğer bileşenlerinin nasıl ölçeklendiğini göstermektedir:  $x_{\lambda,\ell} = s_\lambda x_\ell$  ( $\ell \neq k$ ).

Yukarıdaki bağlantılardan dolayı  $\mathbf{x}$ 'in diğer bileşenleri ortalama sabit kalmakta, yani  $\overline{x_{\lambda,\ell}} = x_\ell$ , buna karşın  $k$  numaralı bileşen azalmaktadır:  $\overline{x_{\lambda,k}} \leq x_k$ .





Şekil 4.1:  $\sigma$ — $\tau$  düzlemindeki yarım daire.

Eğer bütün olası tarafların yaptıkları dönüşümler düşünülürse, bütün bileşenlerin ortalamada azalması veya sabit kalması sonucunu elde ederiz.

Eğer sadece tek bir tarafın yaptığı işlemler söz konusuysa, başka tür bir parametrelendirme ile yeni monotonlar elde edilebilmektedir. Yukarıdaki gibi  $k$  tarafının yaptığı ölçümü düşünelim. Herhangi bir  $\mathbf{x}$  durumu için

$$\sigma = 1 - 2(x_0 + x_k) , \quad (4.4)$$

$$\tau = 2\sqrt{x_0(1 - x_0 - x_k)} , \quad (4.5)$$

olarak tanımlayalım. Dolayısıyla, iki parametre yerine yeni iki parametre buluyoruz. Bu dönüşümün tersi aşağıdaki gibidir.

$$x_0 = \frac{\tau^2}{2(1 + \sigma)} , \quad (4.6)$$

$$x_k = \frac{1 - \sigma^2 - \tau^2}{2(1 + \sigma)} . \quad (4.7)$$

Öncelikle, bu bağlantıların doğal sonucu olarak aşağıdaki eşitsizliklerin sağlanması gerektiğini belirtmekte yarar var.

$$\sigma^2 + \tau^2 \leq 1 , \quad (4.8)$$

$$\tau \geq 0 . \quad (4.9)$$

Bu eşitsizlikler iki boyutlu  $\tau$ — $\sigma$  diyagramında, birim dairenin üst yarısını göstermektedir (Bakınız Şekil 4.1). Üstelik,  $\tau$  ve  $\sigma$  değerleri bu yarım daire içindeki herhangi bir noktada yer alabilir. Bu yarım dairenin eğri sınırı (yani  $\sigma^2 + \tau^2 = 1$  eğrisi),  $x_k = 0$  olan durumları yani  $k$  kübitinin diğerlerine dolanık olmadığı durumları göstermektedir. Buna karşılık, düz olan alt sınır (yani  $\tau = 0$  çizgisi) ise  $x_0 = 0$  olan noktaları, yani bir anlamda maksimal dolanıklığa sahip olan durumları göstermektedir.

İki özel köşe de özel durumlara karşılık gelmekte:  $(\sigma, \tau) = (1, 0)$  köşesi  $x_0 = x_k = 0$  koşulunun sağlandığı, dolayısıyla  $k$  kübitinin dolanıklığını kaybettiği ama diğer kübitler açısından maksimal dolanıklığa sahip olunan bir noktadır. Buna

karşın, diğer köşe, yani  $(\sigma, \tau) = (-1, 0)$  köşesi  $x_0 + x_k = 1$  olan bir durumu gösteriyor. Böyle bir durumda diğer tüm kubitlerin dolanıklığı kayb olduğu için, bu temel olarak dolanıklığın olmadığı bir durumu temsil etmektedir (yani  $\mathbf{x} = (0, 0, \dots, 0)$  noktasına denktir.)

Şimdi  $k$  tarafının bir yerel ölçüm gerçekleştirdiğini düşünelim. Bu dönüşüm, yarım dairede şu şekilde görünecektir: Bir ilk  $(\sigma, \tau)$  noktası  $p_\lambda$  olasılıkla  $(\sigma_\lambda, \tau_\lambda)$  noktalarına dönüşmektedir. Her bir sonuç için ölçekleme parametresinin

$$s_\lambda = \frac{1 + \sigma_\lambda}{1 + \sigma} \quad (4.10)$$

şeklinde ifade edilebileceğini buradan görebiliriz. Buradan da dönüşümün  $\mathbf{x}$  noktasının yer aldığı simpleks içinde nasıl bir dağılıma yol açtığı görülebilir. Özetle,

$$\mathbf{x} \longrightarrow \left\{ p_\lambda; \frac{1 + \sigma_\lambda}{1 + \sigma} \left( x_1, \dots, x_{k-1}, \frac{(1 + \sigma)(1 - \sigma_\lambda^2 - \tau_\lambda^2)}{2(1 + \sigma_\lambda)^2}, x_{k+1}, \dots, x_p \right) \right\} \quad (4.11)$$

Dolayısıyla,  $(\sigma, \tau)$  düzlemsel dağılımının simpleksteki karşılığı doğrusal olmayan bir fonksiyon ile bulunabilir. Yani, elde edilen yeni parametreleme, simpleksin 2-boyutlu eğri bir altkümesi üzerindeki dağılımı düzlemsel bir dağılım haline getirmektedir.

Yeni parametrisasyonun belki de en önemli özelliği, dönüşüm koşulunun  $\tau - \sigma$  düzlemi üzerinde basit bir konveks kombinasyon kuralına indirgenmesidir. (4.2) ve (4.3) denklemleri

$$\overline{\sigma_\lambda} = \sigma \quad , \quad (4.12)$$

$$\overline{\tau_\lambda} \geq \tau \quad , \quad (4.13)$$

olarak ifade edilebilir. Bu  $(\sigma_\lambda, \tau_\lambda)$  noktalarının ağırlık merkezinin (yani ortalama konumunun),  $(\sigma, \tau)$  ilk noktasının pozitif  $\tau$  yönünde ötelenmiş olduğunu söylüyor.

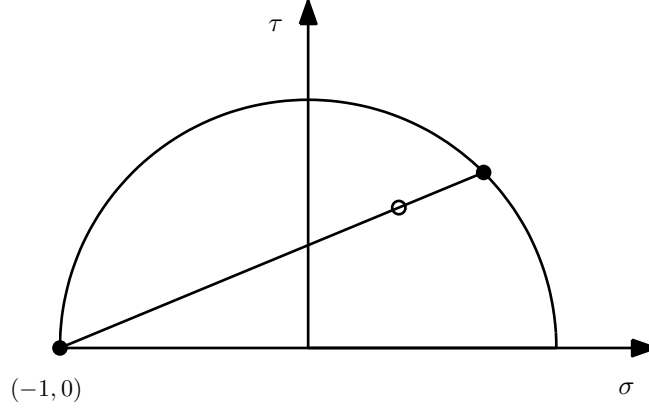
Buradaki ötelenme, idealde istenmeyecek bir niteliğe sahip, çünkü artan  $\tau$  değeri genel olarak dolanıklığın azalması anlamına geliyor. Özellikle, deterministik  $(\sigma, \tau) \longrightarrow (\sigma, \tau + \epsilon)$  ( $\epsilon \geq 0$ ) dönüşümü, sadece  $k$  parçacığının dolanıklığını azaltan, ama diğer parçacıkların dolanıklığını değiştirmeyen bir dönüşüm. Bu parçacığı elinde tutan birinin böyle bir dönüşümü mutlaka gerekmedikçe kullanmayacağını düşünebiliriz. Bu şart altında, dönüşüm kuralı sadece tek bir satırda

$$\overline{(\sigma_\lambda, \tau_\lambda)} = (\sigma, \tau) \quad , \quad (4.14)$$

olarak ifade edilebilir.

Böylece, sadece tek bir tarafın yaptığı dönüşümler bir konveks analiz problemi olarak incelenebilir. Örnek olarak,  $k$ 'inci tarafın kendi parçacığı üzerinde gerçekleştireceği bir işlemle, bütün kubitler arasındaki dolanıklığı yok etmek istediğini düşünelim. En yüksek başarı olasılığını elde etmek için  $k$ 'inci taraf nasıl bir ölçüm yapmalıdır? Bu problemde,  $k$ 'inci tarafın elde etmek istediği durumun  $(\sigma, \tau) = (-1, 0)$  köşesi olduğu açıktır (Bakınız Şekil 4.2). Bu köşeyi en yüksek olasılıkla elde etmek için iki sonuçlu bir ölçümün yapılması, sonuçlardan birinin  $q$  olasılıkla  $(-1, 0)$  köşesini,  $1 - q$  olasılıkla da çember üzerindeki bir noktayı vermesi gerekmektedir. Bu geometrik problemin çözümünden,

$$q = \frac{1 - \sigma^2 - \tau^2}{2(1 + \sigma)} = x_k \quad (4.15)$$



Şekil 4.2:  $\sigma$ — $\tau$  düzlemindeki dönüşüm. İçi boş nokta ilk durumu, diğer iki nokta da olası son durumları gösteriyor.

olduğu görülebilir.

## 4.2 $x_0 = 0$ Yüzündeki Dönüşümler

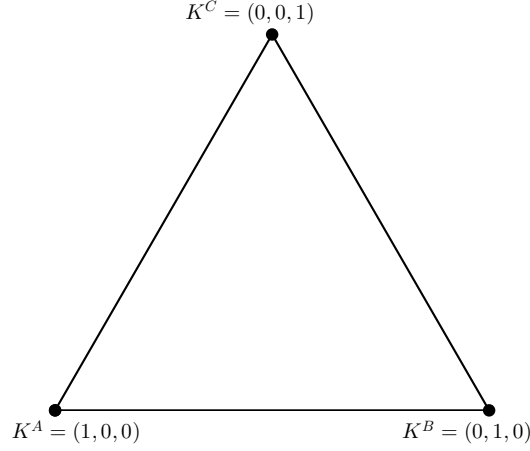
W tipi durumların dönüşümlerinde konveks analizin tekrar ortaya çıktığı bir başka yer de  $x_0 = 0$  yüzündeki dönüşümlerdir. Bu yüz üzerinde  $\mathbf{x}$  noktasının bileşenleri  $x_1 + x_2 + \dots + x_p = 1$  bağlantısını sağlar. Bu yüzey üzerindeki noktaların deterministik dönüşümler açısından maksimal dolanıklığa sahip olduğu daha önce bulunmuştu [Kıntaş ve Turgut, 2010]. Dolayısıyla, bu yüzey üzerinde deterministik dönüşüm söz konusu değildir. Bu yüz üzerindeki noktaların basitleştirici özelliği, yüz üzerindeki herhangi bir dönüşüm halinde denklem (4.3)'in her halükarda sağlanmasıdır. Bu nedenle, sadece lineer bir özelliğe sahip denklem (4.2)'nin sağlanması yeterli olmaktadır. Bu nedenle, sadece tek bir tarafın uyguladığı dönüşümler söz konusu olduğunda, ortada tek bir parametre (yani ölçekleme parametresi  $s$ ) olmaktadır. Bu, ölçüm sonrası ortaya çıkan tüm yeni durumlara karşılık gelen noktaların tek bir doğru üzerinde olduğunu gösteriyor.

Öncelikle notasyonu sabitleştirmekte yarar var. Herhangi bir taraf  $k$  için  $K^k$  ile bu yüz üzerinde olup sadece  $k$ 'ıncı bileşeni 1 olan köşe kastedilecektir. Yani,  $K^1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $K^2 = (0, 1, \dots, 0)$ , vs. Bu noktalar, bahsi geçen yüzün ekstrem noktalarıdır. Bu yüz de bu  $p$  adet noktanın konveks kombinasyonundan oluşan bir  $(p - 1)$ -simplekstir. Yüz üzerindeki herhangi bir  $\mathbf{x}$  noktasını, doğal olarak

$$\mathbf{x} = x_1 K^1 + x_2 K^2 + \dots + x_p K^p \quad (4.16)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Eğer ilk duruma karşılık gelen nokta  $\mathbf{x}$  noktasıysa ve  $k$  tarafı bir yerel ölçüm yapmış, bunun sonucu olarak  $p_\lambda$  olasılıkla  $s_\lambda$  ölçekleme parametresi elde edilmişse, o zaman son durumlara karşılık gelen bütün noktalar  $K^k$  ile  $\mathbf{x}$  noktalarından geçen doğru üzerinde bulunur,

$$\mathbf{x}_\lambda = (1 - s_\lambda) K^k + s_\lambda \mathbf{x} \quad , \quad (4.17)$$



Şekil 4.3: Üç kübit için  $x_0 = 0$  yüzü bir eşkenar üçgendir.

ve doğal olarak, bütün sonuçların ağırlık merkezi ilk noktadır, yani

$$\overline{x_\lambda} = \mathbf{x} \quad (4.18)$$

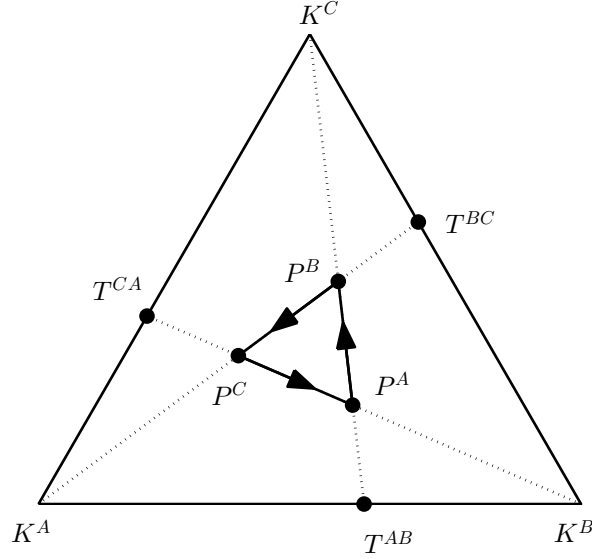
denklemini sağlar.

Bu son sonuç, bütün tarafların birbiri ardı sıra yapabileceği bütün işlemlere uygulanabilir. Yani, eğer verilen bir ilk noktadan bir dağılım elde edilmişse, dağılımdaki bütün noktaların ağırlıklı ortalama noktası her zaman ilk noktada yer alır. Bu ölçüt oldukça basit olmasına karşın, tersi bu kadar basit değildir. Yani, bu yüz üzerinde, ağırlıklı ortalamaları  $\mathbf{x}$  noktasını veren bir dağılım verildiğinde, tarafların ardarda uygulayacakları bir dizi dönüşümle  $\mathbf{x}$  ilk durumunu verilen dağılıma dönüştürebilir miyiz? Cevabın hayır olduğunu bir kaç basit örnek üzerinden görmek mümkün. Buna karşın, bazı özel dağılımlar için, özellikle taraflar arasındaki protokolün belli olduğu dönüşümler için yukarıda anlatılan basitleştirici bağlantı kullanılabilir.

#### 4.2.1 W sınıfı durumlardan çift taraflı dolanık durumların sentezi

Örnek olarak, verilen bir W sınıfı durumdan çeşitli çift taraflı dolanık durumların sentezi problemini ele alalım [Chitambar, 2011]. Analizi basitleştirmek için, söz konusu durumların üç kübite ait olduğunu düşünelim ( $p = 3$ ). Bahsi geçen  $x_0 = 0$  yüzü üç köşeli bir üçgen oluşturacaktır (bakınız Şekil 4.3). Kübitleri A, B ve C olarak adlandırırsak, o zaman üçgenin köşeleri  $K^A$ ,  $K^B$  ve  $K^C$  ile gösterilecektir ( $\cdot$ ). Bu üçgendeki bir  $\mathbf{x}$  noktasına karşılık gelen bir  $|\Phi(\mathbf{x})\rangle$  durumumuz olsun. Bu parçacıkları ellerinde bulunduran Ali, Berna ve Cem bu parçacıkların durumunu çift taraflı bir duruma indirgemek istiyorlar, ama bu çift taraflı durumun hangi iki kübit arasında ortaya çıkacağıyla ilgilenmiyorlar.

Bu yüz üzerinde çift taraflı durumların üçgenin kenarlarında olduğunu belirtelim. Örneğin, A ve B arasındaki bir çift taraflı durum için  $x_C = 0$  olmalı ve dolayısıyla  $\mathbf{x}$  noktası  $K^A$  ile  $K^B$  köşelerini birleştiren kenar üzerinde olmalıdır.



Şekil 4.4: Sonsuz adımda gerçekleşen ve çok taraflı W tipi bir durumu üç farklı iki taraflı duruma dönüştüren protokol.

Söz konusu çift taraflı durum o halde

$$|\Phi(\mathbf{x})\rangle = x_A |100\rangle + x_B |010\rangle \quad (4.19)$$

olacaktır.

Elde edilecek çift taraflı durumların kenarlar üzerindeki  $T^{AB}$ ,  $T^{BC}$  ve  $T^{CA}$  noktalarına karşılık geldiğini düşünelim. İzlenmesi gereken protokol, aşağıda açıklanan ve sonsuz adımdan oluşan bir işlem silsilesi gerektiriyor (ayrıca Şekil 4.4'e bakınız). Parçacıkların ilk durumuna karşılık gelen noktayı  $P^B$  ile gösterelim. (Bu notasyonun tam nedeni aşağıda açığa çıkacak.)

- (1) Önce Ali A parçacığı üzerinde bir ölçüm yapar. Bunun sonucu olarak  $P^B$  noktasında olan durum belli olasılıklarla  $P^C$  veya  $T^{BC}$ 'ye çöker. Bu olasılıkların sırasıyla  $1-p$  ve  $p$  olduğunu varsayalım. Bu dönüşümü sembolik olarak

$$P^B \longrightarrow (1-p)P^C + pT^{BC} \quad (4.20)$$

ile göstereceğiz. Elbette, bu düzlemdeki noktalar olarak  $P^B = (1-p)P^C + pT^{BC}$  bağlantısının sağlamıyor olması gerekmekte.

- (2) Eğer Ali'nin ölçümü  $T^{BC}$  çift taraflı durumu elde etmişse, işlem bitmiştir. Aksi halde, eğer  $P^C$  elde edilmişse, bu defa Berna bir ölçüm yaparak

$$P^C \longrightarrow (1-q)P^A + qT^{CA} \quad (4.21)$$

dönüşümünü gerçekleştirir.

- (3) Eğer bir önceki adımda  $P^A$  elde edilmişse, o zaman Cem bir ölçüm yaparak

$$P^A \longrightarrow (1-r)P^B + rT^{AB} \quad (4.22)$$

dönüşümünü gerçekleştirir.

- (4) Eğer Cem'in ölçümü sonucu  $P^B$  elde edilmişse, o zaman 1. adıma geri dönülür. Ali, en baştan aynı ölçüm işlemine başlar.

Dolayısıyla, bu protokolda Ali, Berna ve Cem sırayla arka arkaya ölçüm alıyorlar. Eğer ölçümlerden birinde çift taraflı bir dolanık durum elde edilmişse duruyorlar; yoksa, devam ediyorlar. Bir tur sonucunda,  $(1-p)(1-q)(1-r)$  olasılıkla, sanki hiçbir şey olmamış gibi tekrar ilk duruma geri dönmeleri mümkün. Geri kalan olasılıklarla da üç çift taraflı durumdan birini elde ediyorlar. Elbette, sonsuzda bu üç durumdan birini elde etmiş olmaları kesinlik kazanıyor. Hangi çift taraflı durumun hangi olasılıkla elde edileceği sorusuysa, yukarıdaki olasılıklardan elde edilecek serilerin hesabından, veya doğrudan konveks kombinasyon kuralından elde edilebilir.

$$P^B = p'T^{BC} + q'T^{CA} + r'T^{AB} \quad (4.23)$$

ifadesi  $p' + q' + r' = 1$  koşulu sağlanacak şekilde sadece tek bir çözüme sahip. Bu denklemden elde edilecek  $p'$  ifadesi  $T^{BC}$  durumunu damıtma olasılığını verir, vs.

Yukarıdaki protokol,  $P^A$ ,  $P^B$  ve  $P^C$  noktalarının birbirlerine çok yakın olduğu zamanlarda da uygulanabilir. Fakat, böyle olması halinde çift taraflı bir durum elde etmek için izlenmesi gereken ortalama adım sayısı artacaktır. Bu dezavantaj bir kenara bırakıldığında, bu üç noktanın çakıştığı bir protokolü de düşünmek mümkün. Eğer

$$P^A = P^B = P^C = \mathbf{x} \quad (4.24)$$

dersek, elde edilecek çift taraflı durumların

$$T^{AB} = \frac{1}{1-x_C} (x_A, x_B, 0) \quad , \quad (4.25)$$

$$T^{BC} = \frac{1}{1-x_A} (0, x_B, x_C) \quad , \quad (4.26)$$

$$T^{CA} = \frac{1}{1-x_B} (x_A, 0, x_C) \quad (4.27)$$

olduğu görülebilir. Konveks kombinasyon bağlantısını kullanarak  $\mathbf{x}$  noktasından başlayarak, yukarıdaki çift taraflı durumları

$$p' = \frac{1}{2}(1-x_C) \quad , \quad (4.28)$$

$$q' = \frac{1}{2}(1-x_A) \quad , \quad (4.29)$$

$$r' = \frac{1}{2}(1-x_B) \quad (4.30)$$

olasılıklarla elde edebiliriz. Ama, elbette, bu çok uzun bir uğraşı gerektirir.

## Bölüm 5

# Sonuç

Dolanıklık, kuantum kuramının bize bahsettiği, tüm yerellik anlayışımızı zorlayan önemli bir kavram. Son 20 yıldır ivmelenen kuantum bilgi kuramı alanındaki çalışmalar, kuantum kuramının o güne kadar sadece garip ve farklı olarak nitelenen özelliklerinin aynı zamanda yararlı ve kullanışlı olduğunu göstermiştir. Bu nedenle, bu kavramların gelecekte her gün kullandığımız teknolojik uygulamalara girmesi kaçınılmaz görünmektedir. Bu amaçla, dolanıklığın niteliğinin anlaşılması ve bunun niceliksel olarak ölçülmesi, gelecekte olası bu tür uygulamalar için çok gereklidir. Bu projede, çok taraflı sistemlerdeki dolanıklığın bazı yönleri incelenmiş ve bazı yeni bulgulara ve yaklaşımlara ulaşılmıştır.

Öncelikle, şimdiye kadar incelenen en önemli sistem olan iki kübitin karışık durumlarının stokastik dönüşümler altındaki sınıflandırılması tartışılmış ve bunun çok taraflı saf durumların dolanıklığı ve bunların dönüşümüyle ilgisi kurulmuştur. Burada karşılaşılan bazı olasılıklarda, reel bir parametreye bağlı sonsuz tane SLOCC sınıfının olduğu görülmüştür. Dolayısıyla, sadece iki tarafın yerel imkanlarla yapacağı dönüşümlerde, çok küçük bir olasılıkla olsa bile değiştiremeyecekleri bazı niceliklerin var olduğu saptanmıştır. Bu noktanın, iki kübitin pratikte kullanılabilir saflaştırılması işlemlerinde uygulamaları söz konusu olabilir.

Bundan sonra  $W$  tipi saf durumların dönüşümleri incelenmiştir. Bazı hallerde, bu durumların dönüşüm kuralları konveks geometrik bir dile dönüştürülebilmektedir. Problemi görselleştirdiği için, böyle bir basitleştirmenin oldukça yararlı olacağı açıktır. Bu yaklaşımla,  $W$  tipi durumlardan çift taraflı dolanık durumların sentezi problemi incelenmiştir.

Projenin kapsamında olan kontrollü ışınlama gibi uygulamalar da bu süreç içinde çalışılmıştır. Fakat, GHZ durumuyla gerçekleştirilebilen kontrollü ışınlamanın  $W$  tipi durumlar için % 100 bir başarıyla gerçekleşmesinin imkansız olduğu görülmüştür. Bundan sonra, maksimum başarıyla ışınlama problemine yoğunlaşmış, fakat bunun da maksimum olasılıkla çift taraflı Bell çiftleri elde etme problemine eşdeğer olduğu görülmüştür. Bu nedenle, ileri aşamalarda, yukarıda da ifade edilen çift taraflı dolanık durumların elde edilmesi problemine yoğunlaşmıştır. Bu problemin de genel bir durum söz konusu olduğunda beklediği kadar kolay olmadığı ve analitik bir ifade çıkarmanın oldukça zor olduğu görülmüştür. Sonuç olarak problem, 4'üncü bölümde anlatılan maksimal durumlar için incelenmiştir.

Projede biri yüksek lisans, diğeri doktora öğrencisi iki bursiyer desteklenmiş-

tir. Yüksek lisans öğrencisi, bu proje konularından bir yüksek lisans tezi yazmış ve derecesini almıştır. Doktora öğrencisinin de proje kapsamında çalıştığı problemleri, yazacağı tezinde kullanması beklenmektedir.



# Kaynakça

- [Aspect *et al.*, 1982a] Aspect, A., Dalibard, J., Roger, G. *Experimental test of bell's inequalities using time-varying analyzers*. Phys. Rev. Lett. **49**, 1804–1807 (1982a).
- [Aspect *et al.*, 1981] Aspect, A., Grangier, P., Roger, G. *Experimental tests of realistic local theories via bell's theorem*. Phys. Rev. Lett. **47**, 460–463 (1981).
- [Aspect *et al.*, 1982b] Aspect, A., Grangier, P., Roger, G. *Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment: A new violation of bell's inequalities*. Phys. Rev. Lett. **49**, 91–94 (1982b).
- [Bell, 1964] Bell, J. S. *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox*. Physics **1**, 195–200 (1964).
- [Bell, 1993] Bell, J. S. *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*. Cambridge University Press (1993).
- [Bennett *et al.*, 1996a] Bennett, C. H., Bernstein, H. J., Popescu, S., Schumacher, B., Smolin, J. A., Wootters, W. K. *Concentrating partial entanglement by local operations*. Phys. Rev. A **53**, 2046–2052 (1996a).
- [Bennett *et al.*, 1993] Bennett, C. H., Brassard, G., Crépeau, C., Jozsa, R., Peres, A., Wootters, W. K. *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*. Phys. Rev. Lett. **70**, 1895–1899 (1993).
- [Bennett *et al.*, 1996b] Bennett, C. H., Brassard, G., Popescu, S., Schumacher, B., Smolin, J. A., Wootters, W. K. *Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels*. Phys. Rev. Lett. **76**, 722–725 (1996b).
- [Bennett *et al.*, 2000] Bennett, C. H., Popescu, S., Rohrlich, D., Smolin, J. A., Thapliyal, A. V. *Exact and asymptotic measures of multipartite pure-state entanglement*. Phys. Rev. A **63**, 012307 (2000).
- [Bennett ve Wiesner, 1992] Bennett, C. H., Wiesner, S. J. *Communication via one- and two-particle operators on einstein-podolsky-rosen states*. Phys. Rev. Lett. **69**, 2881–2884 (1992).
- [Chitambar, 2011] Chitambar, E. *Local quantum transformations requiring infinite rounds of classical communication*. Phys. Rev. Lett. **107**, 190502 (2011).

- [Dür *et al.*, 2000] Dür, W., Vidal, G., Cirac, J. I. *Three qubits can be entangled in two inequivalent ways*. Phys. Rev. A **62**, 062314 (2000).
- [Einstein *et al.*, 1935] Einstein, A., Podolsky, B., Rosen, N. *Can quantum mechanical description of reality be considered complete?* Phys. Rev. **47**, 777–780 (1935).
- [Greenberger *et al.*, 1989] Greenberger, D. M., Horne, M. A., Zeilinger, A. *Going beyond bell’s theorem*. in “Bell’s Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe”, M. Kafatos (Ed.), Kluwer, Dordrecht pp. 69–72 (1989).
- [Jonathan ve Plenio, 1999] Jonathan, D., Plenio, M. B. *Minimal conditions for local pure-state entanglement manipulation*. Phys. Rev. Lett. **83**, 1455 (1999).
- [Kıntaş ve Turgut, 2010] Kıntaş, S., Turgut, S. *Transformations of w-type entangled states*. J. Math. Phys. **51**, 092202 (2010).
- [Lo ve Popescu, 2001] Lo, H.-K., Popescu, S. *Concentrating entanglement by local actions: Beyond mean values*. Phys. Rev. A **63**, 022301 (2001).
- [Miyake ve Verstraete, 2004] Miyake, A., Verstraete, F. *Multipartite entanglement in  $2 \times 2 \times n$  quantum systems*. Phys. Rev. A **69**, 012101 (2004).
- [Turgut *et al.*, 2010] Turgut, S., Gül, Y., Pak, N. K. *Deterministic transformations of multipartite entangled states with tensor rank 2*. Phys. Rev. A **81**, 012317 (2010).
- [Verstraete *et al.*, 2002] Verstraete, F., Dehaene, J., De Moor, B., Verschelde, H. *Four qubits can be entangled in nine different ways*. Phys. Rev. A **65**, 052112 (2002).
- [Vidal, 1999] Vidal, G. *Entanglement of pure states for a single copy*. Phys. Rev. Lett. **83**, 1046–1049 (1999).
- [Wootters ve Zurek, 1982] Wootters, W. K., Zurek, W. H. *A single quantum cannot be cloned*. Nature **299**, 802–803 (1982).

TÜBİTAK  
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

<b>Proje No:</b> 110T335
<b>Proje Başlığı:</b> Çok Taraflı Dolanık Durumların Dönüşümleri
<b>Proje Yürütücüsü ve Araştırmacılar:</b> Doç. Dr. Sadi Turgut (Yürütücü) ve Öğr. Gör. Dr. Ali Can Günhan (Araştırmacı)
<b>Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:</b> Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Üniversiteler Mah. Dumlupınar Blv. No:1, 06800 Çankaya Ankara
<b>Destekleyen Kuruluş(ların) Adı ve Adresi:</b> Mersin Üniversitesi, Çiftlikköy Kampusu, 33343 Yenisehir / Mersin
<b>Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:</b> 01/11/2010 (Başlangıç) 01/11/2012 (Normal bitiş) 01/02/2013 (Uzatma sonrası bitiş)
<b>Öz</b> Çok taraflı durumumların sadece yerel işlemler ve klasik iletişim yardımıyla (LOCC) dönüştürülmesi probleminin bazı yönleri incelenmiştir. Öncelikle, iki kübitin karışık durumlarının stokastik LOCC (SLOCC) dönüşümleri incelenmiş ve bu sistemdeki stokastik dönüşüm denklik sınıfları ortaya çıkarılmıştır. Bazı denklik sınıflarında SLOCC altında değişmeyen reel parametrelerin var olduğu gözlenmiştir. Bundan sonra $W$ tipi durumların olasılıksal dönüşümlerinin bazı yönleri incelenmiştir. Tek bir tarafın gerçekleştirdiği dönüşümler için iki boyutlu bir yarım daire içinde değerler alan yeni monotonlar bulunmuştur. Buna ek olarak, deterministik dönüşümler altında maksimal olan durumların oluşturduğu yüz üzerindeki dönüşümler ifade edilmiş ve bunların oldukça basit konveks geometrik yorumları olduğu gösterilmiştir. Daha sonra bu yaklaşım, $W$ sınıfı bir durumdan çift taraflı dolanık durumların sentezi problemine uyarlanmıştır.
<b>Anahtar Kelimeler:</b> Dolanıklık, Çok taraflı dolanıklık, Klasik iletişim yardımıyla yerel işlemler, LOCC, SLOCC, GHZ durumu, $W$ durumu, Dolanıklık dönüşümleri.
<b>Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu mu?</b> Gerekli Değil.
<b>Projeden Yapılan Yayınlar:</b> (1) "SLOCC Classification of Mixed States of two Qubits", <i>hazırlık aşamasında</i> . (2) "Transformations of the Entangled Mixed States of two Qubits", Ümit Alkuş, Yüksek Lisans tezi, Ocak 2013.