151055 Ens.

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HARMONİK FONKSİYONLARIN TEMEL ÖZELLİKLERİ ve POLİHARMONİK FONKSİYONLAR

Ali ÇEVİK

151055

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2004

Prof. Dr. Abdullah ALTIN danışmanlığında, Ali ÇEVİK tarafından hazırlanan bu çalışma 12/01/2004 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Abdullah ALTIN

Üye : Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Metin OLGUN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HARMONİK FONKSİYONLARIN TEMEL ÖZELLİKLERİ ve POLİHARMONİK FONKSİYONLAR

Ali ÇEVİK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Abdullah ALTIN

Bu yüksek lisans tezi beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, ön bilgiler ve bazı temel kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde, Laplace denkleminin çözümleri olan harmonik fonksiyonlar tanımlanmıştır. Daha sonra değişkenlerine ayırma metodu kullanılarak bazı temel harmonikler elde edilmiş ve harmonik fonksiyonların, çemberlere ve kürelere göre inversiyonları incelenmiştir. Laplace denklemi ile ilgili sınır değer problemleri, harmonik fonksiyonlar için ortalama değer teoremi ve maksimum prensibi verilmiştir. Ayrıca Fourier serileri kullanılarak birim dairede Dirichlet probleminin çözümü elde edilmiş ve bu çözüm için Poisson integral formülü verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Green fonksiyonu yardımıyla Dirichlet probleminin çözümü elde edilmiştir. Harmonik fonksiyonların ileri özellikleri, elektrostatik görüntü metoduyla Green fonksiyonun belirlenmesi, kompleks değişkenli analitik fonksiyonlar ile iki boyutlu Laplace denkleminin ilişkisi ve Neumann problemi incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, poliharmonik denklem tanımlanmış, bu denklemin çözümleri olan poliharmonik fonksiyonların ve Δ Laplace operatörünün bazı özellikleri üzerinde durulmuştur. Ayrıca poliharmonik bir fonksiyonu harmonik fonksiyonlar cinsinden ifade eden Almansi açılımı elde edilmiştir.

Tezin son bölümünde Genelleştirilmiş Eksensel Simetrik Potansiyel Teori (GASPT) denklemi tanımlanmıştır. Bu denklem ile tanımlanan L operatörünün ve denklemi sağlayan genelleştirilmiş eksensel simetrik potansiyel fonksiyonların bazı özellikleri verilmiştir. Son olarak, poli eksensel simetrik potansiyel fonksiyonlar için Almansi açılımı elde edilmiştir.

2004, 110 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Laplace denklemi, Harmonik fonksiyon, Poliharmonik fonksiyon, GASPT denklemi, Almansi açılımı

ABSTRACT

Master Thesis

FUNDAMENTAL PROPERTIES of HARMONIC FUNCTIONS and POLYHARMONIC FUNCTIONS

Ali ÇEVİK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Abdullah ALTIN

This master thesis consists of five chapters.

In the first chapter, introductory information and some fundamental concepts were given.

In the second chapter, the harmonic functions, which are the solutions of Laplace's equation, were defined. Afterwards using separation of variables, some fundamental hormonics were introduced and the inversion of harmonic functions with respect to circles and spheres were examined. Boundary value problems associated with Laplace's equation, the mean value theorem and maximum principles for harmonic functions were given. Furthermore, using Fourier series method the solution of Dirichlet problem for the unit disc was obtained and Poisson integral formula for this solution was given.

In the third chapter, the solution of Dirichlet problem was obtained by using Green's function. Advanced properties of harmonic functions, determination of the Green's function by the method of electrostatic images, the relation between analytic functions of a complex variable and Laplace's equation in two dimensions, Neumann problem were examined.

In the fourth chapter, polyharmonic equation was defined, some properties of the polyharmonic functions, which are the solutions of the polyharmonic equation, and Δ Laplace operator were examined. Furthermore the Almansi expansion, which is the expansion of a polyharmonic function in terms of harmonic functions, was obtained.

In the last chapter, Generalized Axially Symmetric Potential Theory (GASPT) equation was defined. Some properties of the L operator, which is defined by GASPT equation, and the GASPT functions, which are the solutions of this equation, were given. Finally the Almansi expansion for the poly axially symmetric potential functions was obtained.

2004, 110 pages

Key Words: Laplace's equation, Harmonic function, Polyharmonic function, GASPT equation, Almansi expansion

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve çalışmalarımın her aşamasında yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren saygıdeğer hocam, Sayın Prof. Dr. Abdullah ALTIN'a (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi) en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım süresince her zaman yanımda olan, bana manevi destek veren aileme de teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ali ÇEVİK
Ankara, Ocak 2004

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

1.1. Ön Bilgiler

Laplace denklemi, fizik ve mühendisliğin pekçok alanında ortaya çıktığından matematikçilerin, mühendislerin ve bilim adamlarının büyük bir ilgi alanı olmuştur. Potansiyel Teorinin temel denklemi olan Laplace denklemi ve bu denklemin çözümleri olan harmonik fonksiyonlar, Uygulamalı ve Teorik Fizikteki kullanım alanlarının yanında, Matematiğin de hemen hemen her alanında önemli bir yer tutmuş ve ileri araştırmaların temelini oluşturmuştur. Laplace denklemi ve bu denklemin çözümleri olan harmonik fonksiyonların özelliklerinin iyi bilinmesi ileri araştırma yapabilmek için oldukça önemlidir.

1.2. Temel Kavramlar

Tanım 1.2.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de tanımlı $u \in C^2(\Omega)$ fonksiyonunun $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$ noktasındaki gradienti,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \quad \text{(Nabla operatörü)} \tag{1.2.1}$$

operatörü yardımıyla

$$grad\, u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = \vec{w} = (w_1, ..., w_n) \tag{1.2.2}$$

olarak tanımlanan vektörel bir fonksiyondur.

Tanım 1.2.2.(Laplace Operatörü): $\mathbb{R}^n$ de Laplace operatörü Δ ile gösterilir ve

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{1.2.3}$$

şeklinde tanımlanır.

(1.2.1) ve (1.2.3) eşitliklerinden

$$\nabla.\nabla = \nabla^2 = \Delta$$

yazılabilir.

Tanım 1.2.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de tanımlı bir $\vec{w} = (w_1, ..., w_n)$ vektör fonksiyonunun divergensi

$$div\, \vec{w} = \nabla.\, \vec{w} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial w_n}{\partial x_n} \tag{1.2.4}$$

ile tanımlanan skaler bir fonksiyondur.

(1.2.2) ve (1.2.4) eşitliklerinden

$$div(grad\, u) = \nabla.\nabla u = \nabla^2 u = \Delta u \tag{1.2.5}$$

yazılabileceği görülmektedir.

Teorem 1.2.1.(Divergens Teoremi): $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge ve $\partial\Omega$ sınırında dış birim normal vektör $\vec{n}$ olsun. Bileşenleri Ω nın içinde ve sınırı üzerinde türevlenebilir her $\vec{V}$ vektörü için

$$\int_{\Omega} div\left(\vec{V}\right) dv = \int_{\partial\Omega} \vec{V}\,.\,\vec{n}\, d\sigma \tag{1.2.6}$$

dir. Burada, $dv = dx_1...dx_n$ ifadesi Ω da hacim elemanını, $d\sigma$ ifadesi ise $\partial\Omega$ sınır yüzeyi üzerinde yüzey alanı elemanını ifade eder.

Tanım 1.2.4.(Green Özdeşlikleri): $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge ve $\vec{n}$, $\partial\Omega$ sınırında dış birim normal vektör olsun. $u, w \in C^2(\bar{\Omega})$ fonksiyonları için

$$\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial w}{\partial n}\, d\sigma = \int_{\Omega} (u\Delta w + (\nabla u).(\nabla w))\, dv \tag{1.2.7}$$

şeklinde tanımlanan *Birinci Green Özdeşliği* ve

$$\int_{\Omega} (u\Delta w - w\Delta u)\, dv = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma \tag{1.2.8}$$

şeklinde tanımlanan *İkinci Green Özdeşliği* geçerlidir.

Tanım 1.2.5. $\mathbb{R}^n$ de δ yarıçaplı bir hiperkürenin yüzey alanı

$$\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\delta^{n-1} \tag{1.2.9}$$

ile verilir. Burada Γ, Gamma fonksiyonu olup

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)...(n-k)\Gamma(n-k) \qquad \text{ve} \qquad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

dir.

2. LAPLACE DENKLEMİ ve HARMONİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde, harmonik fonksiyonlar tanımlanmış ve bu fonksiyonların geniş bir sınıfı değişkenlerine ayırma, değişken değiştirme, çemberlere ve kürelere göre inversiyonlar ile elde edilmiştir. Laplace denklemi ile verilen bazı sınır değer problemleri tanımlanmış ve fiziksel örneklerle desteklenmiştir. Ayrıca harmonik fonksiyonlar için ortalama değer teoremi ve maksimum prensibi ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Birim daire için Dirichlet probleminin çözümü, Fourier serileri kullanılarak elde edilmiş ve bu çözüm için Poisson integral formülü verilmiştir.

2.1. Harmonik Fonksiyonlar

Tanım 2.1.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \tag{2.1.1}$$

Laplace denklemini sağlayan $u \in C^2(\Omega)$ fonksiyonuna Ω da harmoniktir veya harmonik fonksiyondur denir.

Bir fonksiyonun harmonik olması için sadece Laplace denklemini sağlaması yetmez. Harmonik fonksiyon; Laplace denklemini sağlayan, kendisi ve ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlar olarak tanımlanır.

$$u = a_1 x_1 + ... + a_n x_n + a_0$$

şeklindeki bütün lineer fonksiyonlar ve

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i=j}}^{n} a_{ij} = 0$$

olmak üzere

$$u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

şeklindeki ikinci dereceden homogen bütün polinomlar $\mathbb{R}^n$ de harmoniktir.

Aslında sürekli bile olmayan fakat Laplace denklemini sağlayan yani ikinci mertebeden $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ kısmi türevleri var ve bu kısmi türevlerin toplamı sıfır olan fonksiyonlar vardır. Örneğin; $z = x + iy$ kompleks değişken olmak üzere $\mathbb{R}^2$ de

$$u(x,y) = \begin{cases} \operatorname{Re} e^{-1/z^4} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ile tanımlanan u fonksiyonu Laplace denklemini sağlar ve u fonksiyonu orijinde sürekli değildir.

Teorem 2.1.1. u, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de Laplace denkleminin sürekli bir çözümü ise bu durumda u fonksiyonu Ω da analitiktir.

Teoreme göre, Laplace denkleminin çözümü olarak tanımlanan ve $C^2(\Omega)$ de sürekli olması büyük bir fark göstermeyen harmonik fonksiyonlar gerçekten analitiktir. Teoremin ispatı oldukça zordur fakat iddiası analitik katsayılı her eliptik denklemin çözümü için geçerlidir. Eliptik denklemlerin çözümlerinin düzgünlüğü bu denklemlerin karakteristik yüzeylere sahip olmamasına bağlıdır.

2.2. Bazı Temel Harmonik Fonksiyonlar. Değişkenlerine Ayırma Metodu

Bu kısımda harmonik fonksiyonların bir sınıfı değişkenlerine ayırma metodu ile elde edilecektir. Bu sınıf oldukça küçük olmasına rağmen, süperpozisyon prensibini kullanarak bu sınıfı fazlasıyla genişletmek mümkündür. Eğer, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de tanımlı ve harmonik fonksiyonların bir sınıfına sahip isek, süperpozisyon prensibine göre bu fonksiyonların her lineer kombinasyonu da Ω da harmoniktir.

$\mathbb{R}^3$ de orijine yerleştirilen birim yükten kaynaklanan herhangi $(x, y, z) \neq (0,0,0)$ noktasındaki elektrostatik potansiyel $\frac{1}{r}$ ile orantılıdır. Burada r, $\vec{r} = (x, y, z)$ nin orijine olan uzaklığı olup $r = \left|\vec{r}\right| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ dir. Fizikten bilinmektedir ki; yüklerin dağılımından kaynaklanan potansiyel, yüksüz uzayın her noktasında Laplace denklemini gerçekler.

$$u = \frac{1}{r} \quad , \quad r \neq 0 \tag{2.2.1}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^3$ de orijin dışında harmoniktir. Orijine göre küresel simetrik olan bu fonksiyon, orijin merkezli ve r yarıçaplı küre üzerindeki noktalarda sadece r yarıçapına bağlı olup θ ve ϕ açısal değişkenlerine bağlı değildir. r ye yarıçapsal anlamında radyal değişken adı verilmektedir.

İlk olarak, sadece r radyal değişkenine bağlı olan tüm harmonik fonksiyonları bulalım. Bunu yapmak için, Δ Laplace operatörünün $\mathbb{R}^n$ de küresel koordinatlar ($\mathbb{R}^2$ de kutupsal koordinatlar) cinsinden ifadesine ihtiyaç vardır. Laplace operatörü, $\mathbb{R}^2$ de

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \tag{2.2.2}$$

ve $n > 2$ için $\mathbb{R}^n$ de

$$\Delta u = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Lambda_n u \tag{2.2.3}$$

şeklinde olup burada Λ_n ise sadece açısal değişkenlerle ilgili diferensiyel içeren ikinci mertebeden bir diferensiyel operatördür. $n = 3$ için

$$\Lambda_3 u = \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} \tag{2.2.4}$$

şeklindedir. $n > 3$ için Λ_n nin açık ifadesine ihtiyaç yoktur.
Buradan sadece r ye bağlı harmonik fonksiyonlar kolayca bulunabilir. $\mathbb{R}^2$ deki $u(r)$ gösterimine sahip harmonik fonksiyonlar için $\frac{\partial u}{\partial\theta} = 0$ olduğundan (2.2.2) den dolayı

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \tag{2.2.5}$$

denklemi sağlanmalıdır. Bu denklemi sağlayan lineer bağımsız iki çözüm

$$1 \quad , \quad \ln r \quad (n = 2) \tag{2.2.6}$$

şeklindedir. $n > 2$ için $\mathbb{R}^n$ deki $u(r)$ harmonik fonksiyonu (2.2.3) den dolayı

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \tag{2.2.7}$$

denklemini sağlamalıdır. Bu denklemin lineer bağımsız iki çözümü

$$1 \quad , \quad \frac{1}{r^{n-2}} \quad (n > 2) \tag{2.2.8}$$

dir.

(2.2.6) ve (2.2.8) deki ilk fonksiyonlar $\mathbb{R}^n$ nin tümünde tanımlı ve harmonikken, ikinci fonksiyonlar $\mathbb{R}^n$ de orijin dışında tanımlı ve harmoniktir. $\ln r$ nin $\mathbb{R}^2$ de ve $n > 2$ için $r^{-(n-2)}$ nin $\mathbb{R}^n$ de orijin kutuplu harmonik fonksiyon olduğu söylenebilir.

Diğer temel harmonik fonksiyonları elde etmek için değişkenlerine ayırma metodu kullanılacaktır.

$\mathbb{R}^2$ de

$$u(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta) \tag{2.2.9}$$

gösterimine sahip $u(r,\theta)$ harmonik fonksiyonlarını arayalım. Burada $u(r,\theta)$, r nin bir R fonksiyonu ile θ nın bir Θ fonksiyonunun çarpımı olarak düşünülmüştür. Sadece reel değerli harmonik fonksiyonlar arandığından R ve Θ fonksiyonları reel değerli olarak varsayılmıştır. $u(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta)$ nın kendisi ve türevleri kutupsal koordinatlardaki (2.2.2) Laplace operatöründe yerlerine yazılır ve sıfıra eşitlenirse,

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0$$

elde edilir. Bu denklemi $\dfrac{r^2}{R\Theta}$ ile çarpar ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} \tag{2.2.10}$$

bulunur. Bu eşitliğin sol yanı sadece r nin fonksiyonu iken sağ yanı θ nın bir fonksiyonudur. Tek değişkenli bir fonksiyon, bir başka değişkenin fonksiyonuna eşit olduğuna göre bu fonksiyon aynı sabite eşit olmalıdır. Bu nedenle $\mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere (2.2.10) eşitliği

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = \mu = -\frac{\Theta''}{\Theta}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade

$$r^2 R'' + rR' - \mu R = 0 \tag{2.2.11}$$

$$\Theta'' + \mu\Theta = 0 \tag{2.2.12}$$

denklem çiftine denktir. Laplace denklemini sağlayan $u(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta)$ formundaki bir $u(r,\theta)$ fonksiyonu için, R ve Θ fonksiyonları sırasıyla (2.2.11) ve (2.2.12) adi diferensiyel denklemlerini sağlamalıdır.

(2.2.11), Euler denklemi olup

$$R_\mu(r) = \begin{cases} 1 \quad , \quad \ln r & ; \quad \mu = 0 \\ r^{\sqrt{\mu}} \quad , \quad r^{-\sqrt{\mu}} & ; \quad \mu \neq 0 \end{cases} \tag{2.2.13}$$

şeklinde lineer bağımsız iki çözüme sahiptir. (2.2.12) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü ise

$$\Theta_\mu(\theta) = \begin{cases} 1 \quad , \quad \theta & ; \quad \mu = 0 \\ \cos\left(\sqrt{\mu}\theta\right) \quad , \quad \sin\left(\sqrt{\mu}\theta\right) & ; \quad \mu \neq 0 \end{cases} \tag{2.2.14}$$

şeklindedir. μ negatif olduğu zaman (2.2.13) ve (2.2.14) deki fonksiyonlar kompleks değerlidir. Bu fonksiyonların reel ve imajiner kısımları reel değerli lineer bağımsız çözüm çiftlerini teşkil ederler.

μ nün her değeri için (2.2.13) ve (2.2.14) deki fonksiyonların seçiminde

$$u_\mu(r,\theta) = R_\mu(r)\,\Theta_\mu(\theta) \tag{2.2.15}$$

ifadesi her $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de bir harmonik fonksiyon tanımlamaz. Bu sadece (2.2.15); Ω da iyi tanımlı bir fonksiyona karşılık geldiğinde doğrudur. Genellikle orijini çevreleyen eğriler içeren bölgelerde harmonik fonksiyonlar aranır. $\mathbb{R}^2$, $r < \mathbb{R}$ ile verilen açık diskler ve $R_1 < r < R_2$ ile gösterilen açık çembersel halkalar böyle bölgelere örnektirler. Eğer Ω böyle bir bölge ve Γ ise Ω da orijini çevreleyen herhangi bir eğri ise; Γ nın herhangi bir noktasından başlayıp Γ üzerinde bir defa dönüp başlanılan noktaya gelindiğinde θ açısal değişkeni 2π kadar değişir. Bu durumda (2.2.15) ifadesi

Ω da tek değerli bir fonksiyon tanımlar. O halde $\Theta_\mu(\theta)$ fonksiyonu 2π peryotludur yani her θ için

$$\Theta_\mu(\theta+2\pi)=\Theta_\mu(\theta) \tag{2.2.16}$$

dır. (2.2.14) ile verilen $\Theta_\mu(\theta)$ fonksiyonları

$$\sqrt{\mu}=n \quad ; \quad n=0,1,.....$$

için (2.2.16) periyodiklik koşulunu sağlar. $\mu=0$ olduğunda ise sadece 1 fonksiyonu bu koşulu sağlar. Bu yüzden, Ω orijini çevreleyen eğriler içeren bir bölge ise harmonik fonksiyon tanımlarken (2.2.15) de

$$\Theta_n(\theta)=\cos n\theta\ ,\ \sin n\theta \quad ; \quad n=1,2,... \tag{2.2.17}$$

açısal fonksiyonları kullanılır. Karşılık gelen radyal fonksiyonlar ise

$$R_n(r)=\begin{cases} 1 \ , \ \ln r & ; \ n=0 \\ r^n \ , \ r^{-n} & ; \ n=1,2,... \end{cases} \tag{2.2.18}$$

şeklindedir. (2.2.15) den harmonik fonksiyonların bir sınıfı

$$u_n(r,\theta)=\begin{cases} 1 \ , \ r^n\cos n\theta \ , \ r^n\sin n\theta & ; \ n=1,2,... \\ \ln r \ , \ r^{-n}\cos n\theta \ , \ r^{-n}\sin n\theta & ; \ n=1,2,... \end{cases} \tag{2.2.19}$$

olarak bulunur. Eğer $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ orijini içermezse (2.2.19) daki tüm fonksiyonlar Ω da harmoniktir. Eğer Ω orijini içerirse sadece birinci satırdaki fonksiyonlar Ω da harmoniktir.

Kabul edelim ki; $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, orijini çevreleyen kapalı eğriler içermeyen bir bölge olsun. Bu durumda, θ ile uygun değerler aralığına kısıtlanan

$$u(r,\theta)=\theta \tag{2.2.20}$$

fonksiyonu Ω da harmonik bir fonksiyon tanımlar. Örneğin Ω, $x>0$ sağ yarı düzlemi ise $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ dir. $u(r,\theta) = \theta$ harmonik fonksiyonu kartezyen koordinatlarda

$$u(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad ; \quad 0 < x < \infty \quad , \quad -\infty < y < \infty \tag{2.2.21}$$

şeklindedir. Eğer Ω, $y > 0$ üst yarı düzlemi ise $0 < \theta < \pi$ aralığını alabiliriz. Kartezyen koordinatlarda karşılık gelen harmonik fonksiyon ise

$$u(x,y) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \quad ; \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad 0 < y < \infty \tag{2.2.22}$$

şeklindedir.

$\mathbb{R}^3$ de

$$u(r,\theta,\phi) = R(r)\, Y(\theta,\phi) \tag{2.2.23}$$

gösterimine sahip $u(r,\theta,\phi)$ harmonik fonksiyonlarını bulalım.

$n = 3$ için küresel koordinatlardaki Laplace denklemi

$$\Lambda_3 u = \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$

olmak üzere

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Lambda_3 u = 0$$

şeklindedir. $u(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$ ve türevleri yukarıdaki Laplace denkleminde yazılırsa

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2R'\right)'Y + \frac{1}{r^2}R\,\Lambda_3 Y = 0$$

$$\frac{(r^2R')'}{R} + \frac{\Lambda_3 Y}{Y} = 0$$

$$\frac{(r^2R')'}{R} = -\frac{\Lambda_3 Y}{Y} = \mu \qquad (\mu \in \mathbb{R})$$

bulunur. Buradan

$$\left(r^2R'\right)' - \mu R = 0 \tag{2.2.24}$$

$$\Lambda_3 Y + \mu Y = 0 \tag{2.2.25}$$

denklem çifti elde edilir.

α_1 ve α_2

$$\alpha(\alpha+1)-\mu=0$$

denkleminin kökleri olmak üzere, (2.2.24) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü

$$r^{\alpha_1} \quad , \quad r^{\alpha_2} \tag{2.2.26}$$

şeklindedir. (2.2.25) denkleminin çözümü oldukça zordur. Kabul edelim ki; (θ,ϕ), $\mathbb{R}^3$ de orijine yerleştirilmiş $S(0,1)$ birim küre yüzeyi üzerinde herhangi bir noktanın koordinatları olsun. (2.2.25) denkleminin tüm çözümlerini bulmak yerine $C^2(\Omega)$ da $S(0,1)$ birim küre yüzeyi üzerinde tanımlı $Y(\theta,\phi)$ çözümlerini bilmek yeterlidir. Bu tip çözümler θ ya göre 2π peryotlu olmalı ve kürenin kutuplarında ($\phi=0$ ve $\phi=\pi$ noktalarında) θ dan bağımsız olan limitlere yaklaşmalıdır. μ,

$$\mu_n=n(n+1) \quad ; \quad n=0,1,...$$

değerlerinden birine eşit olduğu zaman, (2.2.25) denkleminin bu koşulları sağlayan aşikar olmayan çözümleri vardır. Böyle μ_n ler için (2.2.25) in

$$Y_n^{(k)}(\theta,\phi) \quad ; \quad k=1,2,...,2n+1 \ , \quad n=0,1,...$$

şeklinde $2n+1$ tane lineer bağımsız çözümü vardır (Courant-Hilbert 1953). Bu tip çözümler birim küre yüzeyi üzerinde elde edildiklerinden *Laplace küresel harmonikleri* adını alır.

$\mu=\mu_n$ için karşılık gelen radyal fonksiyonlar, (2.2.26) dan

$$r^n \quad , \quad r^{-n-1} \quad ; \quad n=0,1,...$$

şeklindedir. Bu durumda $u(r,\theta,\phi)=R(r)\,Y(\theta,\phi)$ formundaki harmonik fonksiyonlar ise

$$u_{n,k}(r,\theta,\phi)=\begin{cases} r^{n}Y_n^{(k)}(\theta,\phi) & ; \quad k=1,2,...,2n+1 \quad ; \quad n=0,1,... \\ r^{-n-1}Y_n^{(k)}(\theta,\phi) & ; \quad k=1,2,...,2n+1 \quad ; \quad n=0,1,... \end{cases} \tag{2.2.27}$$

şeklindedir. Eğer $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ orijini içermezse (2.2.27) deki tüm fonksiyonlar Ω da harmoniktir. Aksi durumda sadece ilk satırdaki fonksiyonlar Ω da harmoniktir.

2.3. Değişken Değiştirilmesi ile Yeni Harmonik Fonksiyonlar Elde Edilmesi Çemberlere ve Kürelere Göre İnversiyonlar

Bu kısımda bilinen harmonik fonksiyonlardan değişken değiştirme ile yeni harmonik fonksiyonların nasıl elde edileceği anlatılacaktır.

İlk olarak, $\mathbb{R}^2$ deki harmonik fonksiyonları dikkate alalım. Ω ve Ω', $\mathbb{R}^2$ de iki bölge olsun. Kabul edelim ki; Ω dan Ω' ye

$$x'=x'(x,y)\ ,\ y'=y'(x,y) \tag{2.3.1}$$

ile verilen bire bir eşleme ve Ω' den Ω ya

$$x=x(x',y')\ ,\ y=y(x',y') \tag{2.3.2}$$

bir ters eşleme varolsun. Burada, $x'=x'(x,y)$ ve $y'=y'(x,y)$ fonksiyonları $C^2(\Omega)$ da iken $x=x(x',y')$ ve $y=y(x',y')$ fonksiyonları $C^2(\Omega')$ dedir. $u(x,y)$, Ω da tanımlı bir fonksiyon olsun. $u(x',y')$ ise Ω' de

$$u(x',y')=u\left(x(x',y'),y(x',y')\right) \tag{2.3.3}$$

formülü ile tanımlansın. (2.3.1) ve (2.3.2) eşlemesi, koordinat dönüşümü ya da değişken değiştirme olarak düşünülebilir. Daha önce ikinci mertebeden bir kısmi türevli denklemi, kanonik forma indirgemek için koordinat dönüşümü kullanılmıştı. Eğer $u(x,y)$ eliptik bir denklemi sağlarsa, o takdirde herhangi bir noktanın komşuluğunda x', y' yeni koordinatları tanıtılabilir, öyle ki yeni koordinatlar cinsinden (2.3.3) ile tanımlanan $u(x',y')$ fonksiyonu, Laplasiyen içeren bir denklemi sağlar.

Kabul edelim ki; $u(x,y)$, Ω da Laplace denklemini sağlasın. Bu durumda aşağıdaki temel dönüşümlerden herhangi birini kullanarak elde edilen $u(x',y')$ fonksiyonu Ω' de Laplace denklemini sağlar.

i) **Ötelemeler (Translations):**

(x_0, y_0), $\mathbb{R}^2$ de sabit bir nokta olmak üzere

$$\begin{aligned} x' &= x + x_0 \quad , \quad y' = y + y_0 \quad ; \\ x &= x' - x_0 \quad , \quad y = y' - y_0 \end{aligned}$$

dır.

ii) **Dönmeler (Rotations):**

α belirli bir açı olmak üzere

$$\begin{aligned} x' &= (\cos\alpha)\, x + (\sin\alpha)\, y \quad , \quad y' = -(\sin\alpha)\, x + (\cos\alpha)\, y \quad ; \\ x &= (\cos\alpha)\, x' - (\sin\alpha)\, y' \quad , \quad y = (\sin\alpha)\, x' + (\cos\alpha)\, y' \end{aligned}$$

dır.

iii) **Yansımalar (Reflections):**

Yansıma, $\mathbb{R}^2$ de herhangi bir doğruya göredir. Örneğin;

x-eksenine göre yansıma

$$x' = x \quad , \quad y' = -y \quad ; \qquad x = x' \quad , \quad y = -y'$$

y-eksenine göre yansıma

$$x' = -x \quad , \quad y' = y \quad ; \qquad x = -x' \quad , \quad y = y'$$

$y = x$ doğrusuna göre yansıma

$$x' = y \quad , \quad y' = x \quad ; \qquad x = y' \quad , \quad y = x'$$

şeklindedir. Herhangi bir doğruya göre yansıma, bu yansımalardan biri ile bir öteleme ve bir dönmenin kombinasyonu olarak elde edilir.

iv) **Benzerlik dönüşümleri (Similarity transformations):**

λ, sıfırdan farklı reel bir sabit olmak üzere

$$x' = \lambda x \quad , \quad y' = \lambda y \quad ; \qquad x = \tfrac{1}{\lambda}x' \quad , \quad y = \tfrac{1}{\lambda}y'$$

şeklindedir.

$u(x,y)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de harmonik bir fonksiyon ise $u(x',y')$ nin α açılık bir dönme altında $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ de harmonik olduğunu görelim.

$$\frac{\partial u}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cos\alpha\sin\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\alpha$$

$$\frac{\partial u}{\partial y'} = \frac{\partial u}{\partial x}(-\sin\alpha) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2\alpha - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\alpha$$

olup

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

elde edilir.

Buradan görülmektedir ki, harmonik bir fonksiyon bir dönme altında harmoniklik özelliğini korur. Diğer temel dönüşümlerin de bir fonksiyonun harmoniklik özelliğini koruduğu kolayca gösterilebilir. Bu dönüşümlerden herhangi biri kullanılarak, bilinen bir harmonik fonksiyondan yeni bir harmonik fonksiyon elde etmek için aşağıdaki yol takip edilmelidir.

$u(x,y)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de harmonik bir fonksiyon olsun. İlk olarak Ω' bulunur.

$$\Omega' = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x(x', y'), y(x', y')) \in \Omega\}$$

Sonra $u(x, y)$ de x yerine $x(x', y')$, y yerine $y(x', y')$ yazılarak $u(x', y')$ bulunur. Son olarak, $x' = x$, $y' = y$ alınarak yeni bir harmonik fonksiyon elde edilir.

Örnek 2.3.1. Orijin hariç $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de harmonik olan

$$\ln r = \ln \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$$

fonksiyonundan

$$x = x' - x_0 \quad , \quad y = y' - y_0$$

ötelemesi ile elde edilen

$$\ln \left[(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2\right]^{1/2}$$

fonksiyonu $(x', y') = (x_0, y_0)$ noktası dışında $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ de harmoniktir. Üslerin atılmasıyla;

$$\ln \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.3.4}$$

fonksiyonu, (x_0, y_0) noktası hariç $\mathbb{R}^2$ de harmoniktir. (2.3.4) fonksiyonu, $\mathbb{R}^2$ de (x_0, y_0) kutuplu harmoniktir şeklinde de söylenebilir. $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{r_0} = (x_0, y_0)$ vektör gösterimleri kullanılırsa (2.3.4)

$$\ln \left|\vec{r} - \vec{r_0}\right| \tag{2.3.5}$$

şeklinde de yazılabilir. Diğer yandan,

$$x' = \lambda x \quad , \quad y' = \lambda y$$

benzerlik dönüşümü ile elde edilen

$$\ln \left[(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2\right]^{1/2} \quad , \quad \lambda > 0 \tag{2.3.6}$$

fonksiyonu da $\mathbb{R}^2$ de orijin kutuplu harmoniktir.

Örnek 2.3.2. Dönmeler için kutupsal koordinatları kullanmak daha uygundur.

$$\begin{array}{lllll} 1 & , \; r^n \cos n\theta & , \; r^n \sin n\theta & ; & n = 1, 2, ... \\ \ln r & , \; r^{-n} \cos n\theta & , \; r^{-n} \sin n\theta & ; & n = 1, 2, ... \end{array}$$

harmonik fonksiyonları α açılık bir dönme ile

$$\left. \begin{array}{lllll} 1 & , \; r^n \cos n(\theta - \alpha) & , \; r^n \sin n(\theta - \alpha) & ; & n = 1, 2, ... \\ \ln r & , \; r^{-n} \cos n(\theta - \alpha) & , \; r^{-n} \sin n(\theta - \alpha) & ; & n = 1, 2, ... \end{array} \right\} \tag{2.3.7}$$

şeklinde olur. İlk satırdaki fonksiyonlar $\mathbb{R}^2$ de harmonikken, ikinci satırdakiler orijin hariç $\mathbb{R}^2$ de harmoniktir.

$\mathbb{R}^2$ de tanımladığımız temel dönüşümler, $\mathbb{R}^3$ de ve daha yüksek boyuttan uzaylardaki ile aşikar olarak benzeşir. Örneğin,

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^3$ de orijin kutuplu harmoniktir. Öteleme ile elde edilen

$$\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{-1/2}$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^3$ de (x_0, y_0, z_0) kutuplu harmoniktir. $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ vektör gösterimleri kullanılırsa, bu fonksiyon

$$\left|\vec{r} - \vec{r_0}\right|^{-1} \tag{2.3.8}$$

şeklinde yazılır ve $\mathbb{R}^3$ de $\vec{r_0}$ kutuplu harmoniktir denir.

Ötelemeler dışındaki $\mathbb{R}^n$ deki diğer temel dönüşümler

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j \quad ; \quad i = 1, ..., n \tag{2.3.9}$$

eşitliğiyle ya da

$$X = A X' \tag{2.3.10}$$

matris gösterimiyle verilebilir. Burada,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \quad , \quad X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ . \\ : \\ . \\ x'_n \end{bmatrix}$$

şeklinde ve $A = [a_{ij}]$, tersi A^{-1} olan $n \times n$ tipinde singüler olmayan bir matristir. O halde (2.3.10) dan

$$X' = A^{-1} X \tag{2.3.11}$$

yazılabilir. (2.3.10) un bir dönüşümü olan (2.3.11), $\mathbb{R}^n$ de A matrisi ile verilen koordinatların bir dönüşümüdür.

Burada şu soru akla gelebilir: Koordinatların hangi lineer dönüşümleri bir fonksiyonun harmonikliğini korur? Daha kesin olarak; $x_1, ..., x_n$ nin herhangi bir fonksiyonu olan $u\,(x_1, ..., x_n)$ harmonik ise koordinatların hangi lineer dönüşümü altında $u(x'_1, ..., x'_n)$ fonksiyonu harmoniklik özelliğine sahiptir. Bu sorunun cevabı aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.3.1. Koordinatların lineer bir dönüşümü ancak ve yalnız λ pozitif bir sabit ve B ortogonal bir matris olmak üzere

$$A = \lambda B \tag{2.3.12}$$

şeklinde bir A matrisi ile verilmişse harmonikliği korur.

Belirtelim ki; B ortogonal bir matris ise

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik} b_{jk} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i \neq j \end{cases}$$

dir. Ayrıca ortogonal matrisler uzaklığı koruyan dönüşümler tanımlar. Bundan dolayı ortogonal matrisler, dönmelerin ve yansımaların bileşkesidir. I birim matris olmak üzere (2.3.12) den

$$A = (\lambda I)\, B$$

yazılabilir. λI, bir benzerlik dönüşümü tanımladığından Teorem 2.3.1 den, harmonikliği koruyan lineer dönüşümler benzerlik dönüşümleriyle dönmelerin ve yansımaların bileşimidir.

$\mathbb{R}^2$ de çembere göre inversiyon olarak bilinen dönüşümü görelim. $S(0,a)$, $\mathbb{R}^2$ de merkezi orijin ve yarıçapı a olan bir çember göstersin. Eğer

$$r\,r^* = a^2 \quad , \quad \theta^* = \theta \tag{2.3.13}$$

ise kutupsal koordinatlardaki (r,θ) ve (r^*,θ^*) noktalarına $S(0,a)$ çemberine göre invers noktalar denir. Belirtelim ki $S(0,a)$ çemberine göre invers olan bu iki nokta aynı radyal üzerindedir.

(r,θ) noktasını

$$r^* = \frac{a^2}{r} \quad , \quad \theta^* = \theta \tag{2.3.14}$$

bağıntısı ile (r^*,θ^*) noktasına eşleyen dönüşümü dikkate alalım. Ters eşleme ise

$$r = \frac{a^2}{r^*} \quad , \quad \theta = \theta^* \tag{2.3.15}$$

şeklindedir. (2.3.14) eşlemesi, $\mathbb{R}^2$ de orijin hariç bütün (r,θ) noktalarında tanımlanmıştır. Bu eşleme, $S(0,a)$ çemberi üzerindeki noktaları sabit bırakırken, $S(0,a)$ çemberinin dışındaki noktaları $S(0,a)$ nın içindeki noktalara eşler. Böylece $S(0,a)$ nın dış bölgesi olan Ω, $S(0,a)$ nın iç bölgesi olan Ω^* a eşlenmiştir.

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, orijini içermeyen herhangi bir bölge ve $u(r,\theta)$ fonksiyonu bu bölgede harmonik olsun. r yerine $\frac{a^2}{r^*}$, θ yerine θ^* alınarak $u(r,\theta)$ dan elde edilen $u(r^*,\theta^*)$ fonksiyonu Ω^* da harmoniktir.

$\mathbb{R}^3$ de bir küreye göre inversiyon, benzer şekilde tanımlanır. $S(0,a)$, $\mathbb{R}^3$ de merkezi orijin ve yarıçapı a olan bir küre yüzeyini göstersin. Eğer

$$r\,r^* = a^2, \;\; \theta^* = \theta, \;\; \phi^* = \phi \tag{2.3.16}$$

ise küresel koordinatlardaki (r,θ,ϕ) ve (r^*,θ^*,ϕ^*) noktalarına $S(0,a)$ ya göre invers noktalar denir.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$, orijini içermeyen herhangi bir bölge ve $u(r,\theta,\phi)$ fonksiyonu bu bölgede harmonik olsun. Ayrıca, Ω bölgesinin (2.3.16) dönüşümü altındaki görüntüsü Ω^* olsun. Ω^* da $u^*(r^*,\theta^*,\phi^*)$ fonksiyonu

$$u^*(r^*,\theta^*,\phi^*) = \frac{a}{r^*}\,u\left(\frac{a^2}{r^*},\theta^*,\phi^*\right) \tag{2.3.17}$$

formülü ile tanımlansın. Bu durumda u^* fonksiyonu Ω^* da r^*,θ^*,ϕ^* değişkenlerine göre Laplace denklemini sağlar.

İnversiyonlarda vektör gösterimini kullanmak sık sık gereklidir. $\vec{r}$ ve $\vec{r}^{\,*}$, $S(0,a)$ küresine göre invers olan iki noktanın yer vektörü ($\mathbb{R}^2$ de ya da $\mathbb{R}^3$ de) ise

$$\frac{\vec{r}^{\,*}}{r^*} = \frac{\vec{r}}{r} \;;\; \left|\vec{r}\right| = r \,, \quad \left|\vec{r}^{\,*}\right| = r^* \tag{2.3.18}$$

ve buradan

$$\vec{r}^{\,*} = \frac{\vec{r}^{\,*}}{r^*}r^* = \frac{\vec{r}}{r}r^* = \frac{a^2}{r^2}\,\vec{r} \tag{2.3.19}$$

dir. Benzer şekilde,

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}}{r}r = \frac{\vec{r}^{\,*}}{r^*}r = \frac{a^2}{r^{*\,2}}\,\vec{r}^{\,*} \tag{2.3.20}$$

dır. Eğer $u(\vec{r})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de harmonik ise

$$u\left(\frac{a^2}{r^{*\,2}}\,\vec{r}^{\,*}\right) \tag{2.3.21}$$

fonksiyonu, Ω^* da harmoniktir. Eğer $u(\vec{r})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de harmonik ise

$$u^*(\vec{r}^*) = \frac{a}{r^*} u \left(\frac{a^2}{r^{*2}} \vec{r}^* \right) \tag{2.3.22}$$

fonksiyonu, Ω^* da harmoniktir.

Örnek 2.3.3. $\mathbb{R}^2$ de

$$\ln \left| \vec{r} - \vec{r}_0 \right| \tag{2.3.23}$$

fonksiyonu $\vec{r} = \vec{r}_0$ kutuplu harmoniktir. Bu fonksiyonun $S\,(0,a)$ çemberine göre inversiyonu,

$$\ln \left| \frac{a^2}{r^{*2}} \vec{r}^* - \vec{r}_0 \right| \tag{2.3.24}$$

ya da yıldızlar atıldıktan sonra

$$\ln \left| \frac{a^2}{r^2} \vec{r} - \vec{r}_0 \right| = \ln \frac{a}{r} + \ln \left| \frac{a}{r} \vec{r} - \frac{r}{a} \vec{r}_0 \right|$$

şeklindedir. Elde edilen bu fonksiyon $\mathbb{R}^2$ de, orijin ve $\vec{r} = \dfrac{a^2}{r_0^2} \vec{r}_0$ kutuplu harmoniktir. Fonksiyonun orijindeki kutbu, (2.3.23) fonksiyonunun ∞ daki kutbuna karşılık gelir. Bu nedenle,

$$\ln \left| \frac{a}{r} \vec{r} - \frac{r}{a} \vec{r}_0 \right| \tag{2.3.25}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ de $\vec{r} = \dfrac{a^2}{r_0^2} \vec{r}_0$ kutuplu harmoniktir. (2.3.23) ve (2.3.25) in kutupları $S\,(0,a)$ çemberine göre inverstir. Eğer, $r_0 < a$ ise (2.3.25) fonksiyonunun kutbu $S\,(0,a)$ çemberinin dışındadır ve (2.3.25) fonksiyonu $S\,(0,a)$ çemberi içinde harmoniktir.

Örnek 2.3.4. $\mathbb{R}^3$ de

$$\frac{1}{\left| \vec{r} - \vec{r}_0 \right|} \tag{2.3.26}$$

fonksiyonu $\vec{r} = \vec{r}_0$ kutuplu harmoniktir. Bu fonksiyonun, $S\,(0,a)$ ya göre inversiyonu

$$\frac{a}{r^*} \frac{1}{\left| \frac{a^2}{r^{*2}} \vec{r}^* - \vec{r}_0 \right|}$$

ya da yıldızlar atıldıktan sonra

$$\frac{1}{\left|\frac{a}{r}\vec{r}-\frac{r}{a}\vec{r}_0\right|} \tag{2.3.27}$$

şeklindedir. Bu fonksiyon, $\mathbb{R}^3$ de $\vec{r}=\frac{a^2}{r_0^2}\vec{r}_0$ kutuplu harmoniktir. (2.3.26) ve (2.3.27) nin kutupları $S(0,a)$ ya göre inverstir. Eğer, $r_0 < a$ ise (2.3.27) fonksiyonunun kutbu $S(0,a)$ nın dışındadır. Bu nedenle (2.3.27) fonksiyonu $S(0,a)$ içinde harmoniktir.

2.4. Laplace Denklemi ile İlgili Sınır Değer Problemleri

Laplace denklemi birçok fiziksel olayda ortaya çıkar. Eğer u, homogen bir kütlede sabit ısı dağılımını temsil ediyorsa; kütle içindeki her noktada u, Laplace denklemini sağlamalıdır. Laplace denkleminin çok sayıda çözümü olduğundan, bu gerçek u yu belirlemek için yeterli değildir. Kütlenin sınırında ısı dağılımı ya da sınıra ısı akışı gibi ek bilgilere sahipsek; bu durumda u, sınır koşulu diye adlandırılan bir koşulu sınırda sağlamalıdır. Laplace denklemini kütle içinde sağlayan ve kütlenin sınırında bir sınır koşulunu gerçekleyen fonksiyonu bulma problemine *sınır değer problemi* denir. Bu kısımda, Laplace denklemi ile ilgili üç temel sınır değer probleminden bahsedilecektir.

Dirichlet problemi ya da birinci sınır değer problemi

Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırı $\partial\Omega$ olan düzgün sınırlı bir bölge ve f fonksiyonu $\partial\Omega$ da tanımlı ve sürekli olsun. Ω da harmonik, $\partial\Omega$ da f ye eşit ve $\bar{\Omega}$ $(\Omega+\partial\Omega)$ da tanımlı ve sürekli olan bir u fonksiyonunu bulalım. Daha açık olarak, $C^2(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega})$ da bulunan ve

$$\Delta u = 0 \quad , \quad \Omega \text{ da} \tag{2.4.1}$$

$$u(x)=f(x) \quad , \quad x\in\partial\Omega \tag{2.4.2}$$

denklemlerini sağlayan u fonksiyonunu bulalım. (2.4.2) eşitliği problemin sınır koşulunu ve verilen f fonksiyonu ise sınır değerini gösterir.

Dirichlet probleminin bu tanımında, Ω ve $\partial\Omega$ da konulan koşullar çok katıdır. İleride Ω nın sınırsız, $\partial\Omega$ nın köşelere sahip ve f sınır değerinin süreksiz olabileceği problemler ele alınacaktır. Ω, sınırlı bir bölgenin dışı olduğunda, problem dış Dirichlet problemi olarak adlandırılır.

Fiziksel bir örneği dikkate alalım: u, homogen bir kütlenin içi olan Ω da sabit ısı dağılımını ve f ise kütle yüzeyi üzerindeki ısı dağılımını tanımlasın. Bu durumda, u fonksiyonunu bulmak için (2.4.1) ve (2.4.2) ile verilen Dirichlet problemini çözelim.

Örnek 2.4.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge ve c verilen bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad , \quad \Omega \text{ da} \\ u(x) &= c \quad , \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

şeklindeki Dirichlet probleminde $f(x) = c$ olup $u(x) = c$ sabit fonksiyonunun bir çözüm olduğu açıkça görülmektedir. İleride bu çözümün, Dirichlet probleminin tek çözümü olduğu görülecektir.

Yukarıda bahsettiğimiz fiziksel örneğimiz açısından bulduğumuz çözümün anlamı "Eğer sonlu bir kütlenin yüzeyi sabit bir c sıcaklığında tutulursa, kütle içindeki her noktadaki sıcaklık c ye eşittir" şeklindedir.

Örnek 2.4.2. Ω, $\mathbb{R}^2$ deki $x^2 + y^2 < 1$ birim daire olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad , \quad \Omega \text{ da} \\ u(1,\theta) &= \cos\theta \quad , \quad 0 \le \theta < 2\pi \end{aligned}$$

Dirichlet problemini çözelim. (Sınır koşullarında kutupsal koordinatları kullanmak daha uygundur).

$$u(x,y) = x$$

ya da kutupsal koordinatlarda

$$u(r,\theta) = r\cos\theta$$

fonksiyonu bu problemin bir çözümüdür. Bu çözümün tek çözüm olduğu ileride görülecektir.

Neumann problemi ya da ikinci sınır değer problemi

Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırı $\partial\Omega$ olan düzgün sınırlı bir bölge; $\vec{n}=\vec{n}\,(x)$, $x \in \partial\Omega$ noktasındaki dış birim normal vektör ve f fonksiyonu $\partial\Omega$ üzerinde tanımlı ve sürekli olsun. $\bar{\Omega}$ da tanımlı ve sürekli, Ω da harmonik ve $\partial\Omega$ üzerindeki dış normal türevi f olan u fonksiyonunu bulalım. Bu problem aşağıdaki şekilde de verilebilir.

$$\Delta u = 0 \quad , \quad \Omega \text{ da} \tag{2.4.3}$$

$$\frac{\partial u\,(x)}{\partial n} = f\,(x) \quad , \quad x \in \partial\Omega \tag{2.4.4}$$

denklemlerini sağlayan u fonksiyonunu bulalım.

Neumann problemi ile verilen fiziksel bir örnek, izotrop homogen bir kütlenin yüzeyine ısı akışının kuralı biliniyorsa, kütledeki sabit ısı dağılımının bulunmasıdır. Eğer kütle yüzeyi izole edilmiş ise (2.4.4) Neumann sınır koşulundaki f fonksiyonu sıfırdır.

Örnek 2.4.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad && , \quad \Omega \text{ da} \\ \frac{\partial u\,(x)}{\partial n} &= 0 && , \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Neumann probleminin çözümü, c herhangi bir sabit olmak üzere $u\,(x) = c$ fonksiyonudur. Dolayısıyla bu problem, sonsuz sayıda çözümlere sahiptir.

Fiziksel örneğimiz açısından çözümün anlamı: "Yüzeyi izole edilmiş bir kütle içindeki ısı dağılımı sabittir, bu sabit kütlede bulunan ısının büyüklüğüne bağlıdır ve kütlenin bir tek noktasındaki sıcaklığı bilmek bu sabiti belirlemek için yeterlidir" şeklindedir.

Karışık problem ya da üçüncü sınır değer problemi

Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırı $\partial\Omega$ olan düzgün sınırlı bir bölge; $\vec{n}=\vec{n}\,(x)$, $x \in \partial\Omega$ noktasındaki dış birim normal vektör ve α, β, f ise $\partial\Omega$ üzerinde tanımlı ve sürekli fonksiyonlar olsun. Karışık problem,

$$\Delta u = 0 \quad , \quad \Omega \text{ da} \tag{2.4.5}$$

$$\alpha\,(x)\,\frac{\partial u\,(x)}{\partial n} + \beta\,(x)\,u\,(x) = f\,(x) \quad , \quad x \in \partial\Omega \tag{2.4.6}$$

koşullarını sağlayan $\bar{\Omega}$ da tanımlı ve sürekli u fonksiyonunu bulma problemidir.

Bu kısmın üç temel amacı şunlardır:

1. Bir sınır değer problemi hangi koşullar altında iyi kurulmuştur. İyi kurulmuş olma; problemin, sınır değerlerine sürekli bağımlı bir tek çözüme sahip olması anlamındadır.

2. İyi kurulmuş bir problemin çözümü için metodlar tanımlamak.

3. Çözümün genel özelliklerini belirlemek.

Makul gibi görünen her problem iyi kurulmuş olmayabilir. Örneğin (2.4.3) ve (2.4.4) ile verilen Neumann problemi, f fonksiyonunun $\partial\Omega$ üzerinde integrali sıfıra eşit olmadıkça hiç bir çözüme sahip değildir. Bu gerekli durum bir çözümün varlığı için sağlandığında, Örnek 2.4.3. ile verilen problem sonsuz sayıda çözüme sahip olabilir. Çözümün sınırlı olma koşulu kabul edilmedikçe, iki bağımsız değişkenli dış Dirichlet problemi sonsuz sayıda çözüme sahiptir. Problem iyi kurulmuş ise çözümünü bulmaya çalışabiliriz. Problemin özellikle basit olduğu zaman hariç, çözümü için basit bir formül bulunması beklenemez. Yine de, bir bilgisayar yardımıyla çözüme daima nümerik yaklaşımlar bulunabilir.

Laplace denklemi ile ilgili sınır değer problemlerinde, Laplace operatörünün lineerliği önemli rol oynar. Kabul edelim ki; u_1,

$$\Delta u = 0 \quad , \quad \Omega \text{ da} \quad ; \quad u = f_1 \quad , \quad \partial\Omega \text{ üzerinde}$$

Dirichlet probleminin çözümü ve u_2 ise

$$\Delta u = 0 \quad , \quad \Omega \text{ da} \quad ; \quad u = f_2 \quad , \quad \partial\Omega \text{ üzerinde}$$

Dirichlet probleminin bir çözümü olsun. Bu durumda; c_1 ve c_2 herhangi iki sabit olmak üzere, $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ lineer kombinasyonu

$$\Delta u = 0 \quad , \quad \Omega \text{ da} \quad ; \quad u = c_1 f_1 + c_2 f_2 \quad , \quad \partial\Omega \text{ üzerinde}$$

Dirichlet probleminin bir çözümüdür. Özel olarak; u_1 ve u_2 , (2.4.1) ve (2.4.2) ile verilen aynı Dirichlet probleminin çözümleri ise $u = u_1 - u_2$ fonksiyonu

$$\Delta u = 0 \quad , \quad \Omega \text{ da} \quad ; \quad u = 0 \quad , \quad \partial\Omega \text{ üzerinde} \tag{2.4.7}$$

Dirichlet probleminin çözümüdür. Bu nedenle, (2.4.1) ve (2.4.2) ile verilen Dirichlet probleminin çözümünün tekliğini ispatlamak için (2.4.7) nin tek çözümü olan fonksiyonun sıfıra özdeş olduğunu göstermek yeterlidir.

2.5. Harmonik Fonksiyonlar İçin Ortalama Değer Teoremi ve Maksimum Prensibi

Bu kısımda, $\mathbb{R}^n$ nin sınırlı bir bölgesinde tanımlı bir fonksiyonun herhangi bir noktadaki değerini veren teorem ispatlanacaktır. Daha sonra, bu teorem harmonik fonksiyonların ortalama değer özelliğine sahip olduğunu göstermek için kullanılacaktır.

Teorem 2.5.1.($n = 3$ için): $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ sınırlı bir bölge ve $\vec{n}$, $\partial\Omega_0$ sınırında dış birim normal vektör olsun. $u \in C^2(\bar{\Omega}_0)$ olmak üzere u nun herhangi bir $\vec{r}_0 \in \Omega_0$ noktasındaki değeri

$$u(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega_0} \left[\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|} \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n} - u(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|} \right] d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} \frac{\nabla^2 u(\vec{r})}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|} \, dv \tag{2.5.1}$$

dir.

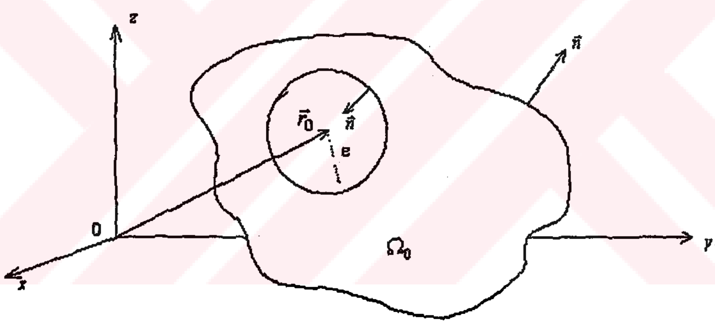
İspat : Teoremin ispatı ikinci Green özdeşliğinin bir uygulamasıdır. $C^2(\bar{\Omega}_0)$ daki herhangi u ve w fonksiyonları için

$$\int_{\Omega_0} (u\nabla^2 w - w\nabla^2 u)\, dv = \int_{\partial\Omega_0} \left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma \qquad (2.5.2)$$

şeklindeki ikinci Green özdeşliği geçerlidir. O halde teoremin ifadesindeki u fonksiyonunu ve $\vec{r}_0$ kutuplu

$$w(\vec{r}) = \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|} \qquad (2.5.3)$$

harmonik fonksiyonunu (2.5.2) eşitliğine uygulayalım. w, $\vec{r}_0$ da bir singülerliğe sahip ve $\vec{r}_0 \in \Omega_0$ olduğundan; Ω_0 dan $\bar{B}\ (\vec{r}_0, \varepsilon) \subset \Omega_0$ olacak şekildeki $\vec{r}_0$ merkezli ve ε yarıçaplı $\bar{B}\ (\vec{r}_0, \varepsilon)$ kürenin çıkarılmasıyla elde edilen Ω_ε bölgesini dikkate alalım.



Şekil 2.5.1.

Bu durumda,

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_0 - \bar{B}\ (\vec{r}_0, \varepsilon) \qquad (2.5.4)$$

dır. $u, w \in C^2(\bar{\Omega}_\varepsilon)$ olduğundan (2.5.2) uygulanabilirdir. w, Ω_ε da harmonik olduğundan $\nabla^2 w = 0$ dır. $S(\vec{r}_0, \varepsilon)$, $\vec{r}_0$ merkezli ve ε yarıçaplı küre yüzeyi olmak üzere $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega_0 \bigcup S(\vec{r}_0, \varepsilon)$ şeklindedir. O halde (2.5.2) eşitliğinden, yeterince küçük her $\varepsilon > 0$ için

$$-\int\limits_{\Omega_0} \frac{\nabla^2 u(\vec{r})}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}dv = \int\limits_{\partial\Omega_0}\left[u(\vec{r})\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}-\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}\right]d\sigma + \int\limits_{S(\vec{r}_0,\varepsilon)}\left[u(\vec{r})\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}-\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}\right]d\sigma \tag{2.5.5}$$

yazılabilir. $\varepsilon \to 0$ için limite geçilirse;

$$\int\limits_{\Omega_0}\frac{\nabla^2 u(\vec{r})}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}dv$$

integrali yakınsak olduğundan,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{\nabla^2 u(\vec{r})}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}dv\right] = -\int\limits_{\Omega_0}\frac{\nabla^2 u(\vec{r})}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}dv \tag{2.5.6}$$

dır. $S(\vec{r}_0,\varepsilon)$ üzerindeki $\vec{r}$ noktaları için $\dfrac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}=\dfrac{1}{\varepsilon}$ ve $\dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$ olduğundan

$$\int\limits_{S(\vec{r}_0,\varepsilon)}\left[u(\vec{r})\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}-\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}\right]d\sigma = \int\limits_{S(\vec{r}_0,\varepsilon)}\left[\frac{1}{\varepsilon^2}u(\vec{r})-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}\right]d\sigma$$

$$\begin{aligned} &= \int\limits_{S(\vec{r}_0,\varepsilon)}\left[\frac{1}{\varepsilon^2}u(\vec{r}_0)\right]d\sigma + \int\limits_{S(\vec{r}_0,\varepsilon)}\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\left[u(\vec{r})-u(\vec{r}_0)\right]-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}\right\}d\sigma \\ &= 4\pi u(\vec{r}_0) + \int\limits_{S(\vec{r}_0,\varepsilon)}\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\left[u(\vec{r})-u(\vec{r}_0)\right]-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}\right\}d\sigma \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\left| \int\limits_{S(\vec{r}_0,\varepsilon)} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2}\left[u(\vec{r}) - u(\vec{r}_0)\right] - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n} \right\} d\sigma \right| \le \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{S(\vec{r}_0,\varepsilon)} \left|u(\vec{r}) - u(\vec{r}_0)\right| d\sigma$$

$$+\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{S(\vec{r}_0,\varepsilon)} \left|\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}\right| d\sigma$$

$$\le 4\pi \max_{\vec{r}\in S(\vec{r}_0,\varepsilon)} \left|u(\vec{r}) - u(\vec{r}_0)\right|$$

$$+4\pi\varepsilon \max_{\vec{r}\in\bar{\Omega}_0} \left|\text{grad } u(\vec{r})\right|$$

dir. u, $\bar{\Omega}_0$ da sürekli olduğundan eşitsizliğin sağındaki ilk terimin $\varepsilon \to 0$ için limiti 0 dır. $\bar{\Omega}_0$ da $\left|\text{grad } u(\vec{r})\right|$ nun maksimumu sonlu olduğundan eşitsizliğin sağındaki ikinci terimin de $\varepsilon \to 0$ için limiti 0 dır. O halde

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left| \int\limits_{S(\vec{r}_0,\varepsilon)} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2}\left[u(\vec{r}) - u(\vec{r}_0)\right] - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n} \right\} d\sigma \right| = 0$$

dır. Buradan da

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int\limits_{S(\vec{r}_0,\varepsilon)} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2}\left[u(\vec{r}) - u(\vec{r}_0)\right] - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n} \right\} d\sigma \right] = 0$$

olup bu sonuç (2.5.7) de $\varepsilon \to 0$ için kullanılırsa,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \int\limits_{S(\vec{r}_0,\varepsilon)} \left[u(\vec{r})\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|}\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n} \right] d\sigma \right\} = 4\pi u(\vec{r}_0) \qquad (2.5.8)$$

elde edilir. Sonuç olarak; (2.5.5) de $\varepsilon \to 0$ için limite geçildiğinde (2.5.6) ve (2.5.8) den yararlanarak

$$u(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial\Omega_0} \left[\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|}\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n} - u(\vec{r})\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|} \right] d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega_0} \frac{\nabla^2 u(\vec{r})}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|} dv$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.5.2. ($n = 2$ için) : Ω_0, $\mathbb{R}^2$ de sınırlı bir bölge; $\vec{n}$, $\partial\Omega_0$ sınırında dış birim normal vektör ve u, $C^2(\bar{\Omega}_0)$ de herhangi bir fonksiyon olsun. u nun herhangi bir $\vec{r}_0 \in \Omega_0$ noktasındaki değeri

$$\begin{aligned} u(\vec{r}_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_0}\left[\ln\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n} - u(\vec{r})\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}\right]ds \\ &\quad -\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_0}\nabla^2 u(\vec{r})\ln\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}\,dxdy \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

ile verilir. Burada ds, $\partial\Omega_0$ üzerindeki uzunluk elemanıdır.

Teoremin ispatı, Teorem 2.5.1. in ispatına benzer şekilde yapılır.

$n > 3$ için teoremin gösterimi; $\mathbb{R}^n$ deki $\vec{r}_0$ kutuplu

$$w(\vec{r}) = \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|^{n-2}}$$

harmonik fonksiyonunu kullanarak, $n = 2$ ve $n = 3$ için yapılan yöntemle $\vec{r}_0 \in \Omega_0$ daki $u(\vec{r}_0)$ değeri

$$\begin{aligned} u(\vec{r}_0) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-2)\,2\pi^{\frac{n}{2}}}\left\{\int_{\partial\Omega_0}\left[\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|^{n-2}}\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n} - u(\vec{r})\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|^{n-2}}\right]d\sigma \right.\\ &\quad \left. -\int_{\Omega_0}\frac{\nabla^2 u(\vec{r})}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|^{n-2}}\,dv\right\} \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.5.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de tanımlı bir u fonksiyonunun herhangi bir $\vec{r}_0 \in \Omega$ noktasındaki değeri, $\vec{r}_0$ merkezli ve δ yarıçaplı $S(\vec{r}_0, \delta)$ küre yüzeyi üzerinde aldığı değerlerin ortalamasına eşitse; $u(\vec{r})$ fonksiyonu Ω da ortalama değer özelliğine sahiptir denir. Burada $S(\vec{r}_0, \delta)$ ve onun iç bölgesi olan $B(\vec{r}_0, \delta)$, Ω içindedir.

Bu değer, $\bar{B}\ (\vec{r}_0, \delta) \subset \Omega$ olmak üzere her $\delta > 0$ için

$$u(\vec{r}_0)=\frac{1}{\left|S(\vec{r}_0,\delta)\right|}\int\limits_{S(\vec{r}_0,\delta)} u(\vec{r})d\sigma \tag{2.5.11}$$

dır. (2.5.11) de $\left|S(\vec{r}_0,\delta)\right|$, $S(\vec{r}_0,\delta)$ küresinin yüzey alanını gösterir. Dolayısıyla, $n=2$ için $\left|S(\vec{r}_0,\delta)\right|=2\pi\delta$ ve $n=3$ için $\left|S(\vec{r}_0,\delta)\right|=4\pi\delta^2$ dir.

Teorem 2.5.3.(Ortalama Değer Teoremi): $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ de harmonik bir u fonksiyonu Ω da ortalama değer özelliğine sahiptir.

İspat: $n=3$ için teoremin ispatını verelim. Teorem 2.5.1. in ifadesindeki Ω_0 bölgesini $B(\vec{r}_0,\delta)$ olarak alalım. $\bar{B}\ (\vec{r}_0,\delta)\subset\Omega$ ve u fonksiyonu Ω da harmonik olduğundan $u\in C^2(\bar{\Omega}_0)$ dır. O halde (2.5.1) den

$$u(\vec{r}_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S(\vec{r}_0,\delta)}\left[\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}-u(\vec{r})\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}\right]d\sigma \tag{2.5.12}$$

yazılabilir. $\vec{r}$, $S(\vec{r}_0,\delta)$ küre yüzeyi üzerindeki noktalar için yer vektörü olmak üzere

$$\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}=\frac{1}{\delta}\quad;\quad\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}=-\frac{1}{\delta^2}$$

dir. Burada n, $S(\vec{r}_0,\delta)$ üzerinde dış normal doğrultudur. Bu nedenle (2.5.12) eşitliğinden

$$u(\vec{r}_0)=\frac{1}{4\pi\delta^2}\int\limits_{S(\vec{r}_0,\delta)}u(\vec{r})d\sigma+\frac{1}{4\pi\delta}\int\limits_{S(\vec{r}_0,\delta)}\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}d\sigma \tag{2.5.13}$$

yazılır. Divergens teoreminden dolayı

$$\int\limits_{S(\vec{r}_0,\delta)}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=\int\limits_{S(\vec{r}_0,\delta)}\nabla u\,.\,\vec{n}\ d\sigma=\int\limits_{B(\vec{r}_0,\delta)}\nabla^2 u\,dv=0$$

olduğundan (2.5.13) eşitliği

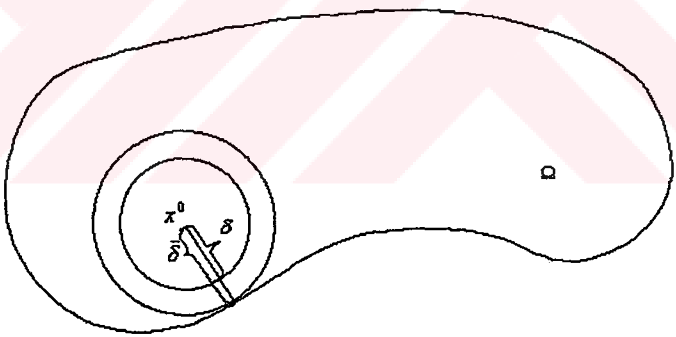
$$u(\vec{r}_0)=\frac{1}{4\pi\delta^2}\int\limits_{S(\vec{r}_0,\delta)}u(\vec{r})\,d\sigma$$

şekline dönüşür. Bu sonuç, $n = 3$ için (2.5.11) eşitliği ile uyumludur.

Harmonik fonksiyonların ortalama değer özelliği, maksimum prensibi olarak bilinen çok önemli bir sonucu verir.

Teorem 2.5.4.(Maksimum Prensibi): $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olmak üzere u fonksiyonu $\bar{\Omega}$ da tanımlı ve sürekli, Ω da ise harmonik olsun. Eğer u, $\bar{\Omega}$ da sabit bir fonksiyon değilse maksimum ve minumum değerlerini mutlaka $\partial\Omega$ sınırında alır.

İspat: Analizden bilinmektedir ki; u sınırlı ve kapalı bir $\bar{\Omega}$ bölgesinde sürekli ise maksimum ve minumum değerlerini $\bar{\Omega}$ ın noktalarında alır.
İlk olarak maksimum değer için inceleme yapalım.
$x = (x_1, ..., x_n)$ olmak üzere, $\max\limits_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = M$ olsun. u harmonik fonksiyonunun M değerini, Ω da bir $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ noktasında aldığını kabul edelim. Bu durumda $x^0 \in \Omega$ için $u(x^0) = M$ dir. $\delta < \bar{\delta}$ olmak üzere, harmonik fonksiyonlar için ortalama değer özelliğinden u nun $S(x^0, \delta)$ küresi üzerinde aldığı değerlerin ortalaması $u(x^0) = M$ olmalıdır.



Şekil 2.5.2.

Ayrıca u, Ω da sürekli bir fonksiyon ve $u(x^0) = M$ olduğundan, u nun $S(x^0, \delta)$ küre yüzeyi üzerindeki değerleri M den büyük olamaz yani $M = u(x^0)$ a eşit veya $M = u(x^0)$ dan küçüktür. O halde kabulden ve ortalama değer teoreminden

$$u\left(x^0\right) = \frac{1}{4\pi\delta^2} \int\limits_{S(x^0,\delta)} u\left(x^0\right) d\sigma \tag{2.5.14}$$

$$u\left(x^0\right) = \frac{1}{4\pi\delta^2} \int\limits_{S(x^0,\delta)} u\left(x\right) d\sigma \tag{2.5.15}$$

eşitlikleri yazılabilir. (2.5.14) den (2.5.15) çıkarılırsa

$$\begin{aligned} u\left(x^0\right) - u\left(x^0\right) &= \frac{1}{4\pi\delta^2} \int\limits_{S(x^0,\delta)} u\left(x^0\right) d\sigma - \frac{1}{4\pi\delta^2} \int\limits_{S(x^0,\delta)} u\left(x\right) d\sigma \\ &= \frac{1}{4\pi\delta^2} \int\limits_{S(x^0,\delta)} \left[u\left(x^0\right) - u\left(x\right)\right] d\sigma \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4\pi\delta^2} \int\limits_{S(x^0,\delta)} \left[M - u\left(x\right)\right] d\sigma = 0$$

elde edilir. $M - u(x)$ fonksiyonu süreklidir ve $S\left(x^0, \delta\right)$ üzerindeki her noktada $M - u\left(x\right) \geq 0$ dır. Dolayısıyla, integral sonucunun sıfır olması için u fonksiyonu, $S\left(x^0, \delta\right)$ üzerindeki her noktada M değerini almalıdır. Bu sonuç ise, 0 ile $\bar{\delta}$ arasındaki her δ için doğru olduğundan $B\left(x^0, \delta\right)$ yuvarında her x için $u\left(x\right) = M$ dir.

y, Ω da herhangi bir nokta olmak üzere $u(y) = M$ olduğunu gösterelim. Ω kapalı olduğundan x^0 ile y noktalarını birleştiren ve tamamen bu bölgede bulunan çokgensel bir C yolu vardır.

Bu durumda,

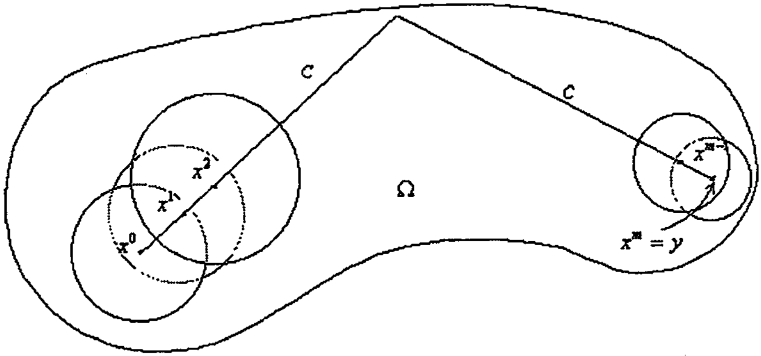
i) $B\left(x^i, \delta_i\right) \subset \Omega$; $i = 0, 1, ..., m$

ii) $x^i \in B\left(x^{i-1}, \delta_{i-1}\right)$; $i = 1, ..., m$

özelliklerini sağlayan, C üzerinde bulunan ve $B(x^i, \delta_i)$ yuvarlarının merkezi olabilecek

$$x^0, x^1, ..., x^m = y$$

noktalarının sonlu bir sayısı bulunabilir.



Şekil 2.5.3.

O halde;

Her $x \in B(x^0, \delta_0)$ için $u(x) = M$ ve $x^1 \in B(x^0, \delta_0)$ olduğundan $u(x^1) = M$ dir.

Her $x \in B(x^1, \delta_1)$ için $u(x) = M$ ve $x^2 \in B(x^1, \delta_1)$ olduğundan $u(x^2) = M$ dir.

Bu şekilde devam edilirse, sonlu sayıda basamak işlemden sonra

Her $x \in B(x^{m-1}, \delta_{m-1})$ için $u(x) = M$ ve $x^m \in B(x^{m-1}, \delta_{m-1})$ olduğundan $u(x^m) = u(y) = M$ sonucuna varılır. y, Ω da herhangi bir nokta olduğundan her $x \in \Omega$ için $u(x) = M$ dir. Süreklilikten dolayı her $x \in \bar{\Omega}$ için $u(x) = M$ dir. Dolayısıyla u, $\bar{\Omega}$ da sabit M değerine eşittir.

Minumum değer için de benzer şekilde inceleme yapılarak, u harmonik fonksiyonunun $\bar{\Omega}$ da sabit bir değere eşit olması gerektiği kolaylıkla görülür.

Buradan şu sonuç çıkarılabilir: Harmonik u fonksiyonu, sabit bir fonksiyon olmadıkça maksimum ve minumum değerlerini Ω bölgesi içinde alamaz. Sınırlı ve kapalı bir $\bar{\Omega}$ bölgesinde sürekli u fonksiyonu, maksimum ve minumum değerlerini $\bar{\Omega}$ ın noktalarında aldığından verilen u harmonik fonksiyonu bu değerlerini mutlaka $\partial\Omega$ üzerinde alır.

2.6. Dirichlet Probleminin İyi Kurulması

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sınırı $\partial\Omega$ olan düzgün sınırlı bir bölge ve f fonksiyonu $\partial\Omega$ da tanımlı ve sürekli olsun.

$$\Delta u = 0 \quad , \quad \Omega \text{ da} \tag{2.6.1}$$

$$u = f \quad ; \quad \partial\Omega \text{ üzerinde} \tag{2.6.2}$$

denklemlerini sağlayan $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ fonksiyonunun bulunması Dirichlet problemi olarak tanımlanmıştı.

Bu problemin iyi kurulmuş olduğunu ispat etmek için,

i) Bir çözüm vardır

ii) Çözüm tekdir

iii) Çözüm sürekli olarak f sınır değerine bağlıdır

şartlarının sağlandığını göstermek gerekir.

Çözümün tekliği ve sınır değerlerine sürekli bağımlılığı maksimum prensibinden hemen anlaşılır.

Teorem 2.6.1. (2.6.1) ve (2.6.2) ile tanımlanan Dirichlet problemi en fazla bir çözüme sahiptir.

İspat: Problemin herhangi iki çözümünün aynı olması gerektiğini göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki; u_1 ve u_2 herhangi iki çözüm ve bunların farkı $\bar{u} = u_1 - u_2$ olsun. Bu durumda $\bar{u}$; Ω da harmonik, $\bar{\Omega}$ da sürekli ve $\partial\Omega$ üzerinde " 0 " dır. Maksimum prensibinden, $\bar{u}$ maksimum ve minumum değerlerini $\partial\Omega$ üzerinde alır. Bu nedenle $\bar{u} \equiv 0$ dır. Buradan, $\bar{\Omega}$ da $u_1 \equiv u_2$ sonucu çıkar.

Teorem 2.6.2. f_1 ve f_2, $\partial\Omega$ üzerinde tanımlı ve sürekli iki fonksiyon olsun. u_1, (2.6.1) ve (2.6.2) ile verilen Dirichlet probleminin $f = f_1$ için çözümü olsun. Aynı şekilde u_2 de (2.6.1) ve (2.6.2) ile verilen Dirichlet probleminin $f = f_2$ için çözümü olsun. $\varepsilon > 0$ için

$$|f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon \quad , \quad x \in \partial\Omega \text{ için} \tag{2.6.3}$$

ise bu takdirde,

$$|u_1(x) - u_2(x)| < \varepsilon \quad , \quad x \in \bar{\Omega} \text{ için} \tag{2.6.4}$$

dir.

İspat: $u_1 - u_2 = \bar{u}$ olsun. Bu durumda $\bar{u}$, Ω da harmonik ve $\bar{\Omega}$ da süreklidir. (2.6.3) den

$$|\bar{u}(x)| < \varepsilon \quad , \ x \in \partial\Omega \ \text{ için}$$

ve maksimum prensibinden

$$|\bar{u}(x)| < \varepsilon \quad , \ x \in \bar{\Omega} \ \text{ için}$$

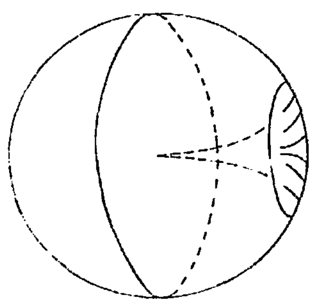
dir. Buradan (2.6.4) elde edilir.

Dirichlet probleminin çözümünün varlığı sorusu oldukça zordur. Cevabı ise Ω bölgesinin geometrisine bağlıdır. Ω bölgesinde bir çözümün varlığını garanti eden koşulları belirtmeden önce, H. Lebesgue'in özel bir bölgede çözüme sahip olmayan bir Dirichlet problem örneğini kısaca inceleyelim. Bu örnek, hangi durumda çözümün varolmadığını göstermektedir.

$\mathbb{R}^3$ de yüzeyi değiştirilebilir bir küreyi dikkate alalım. Yüzey üzerindeki bir noktadan sivri uçlu bir çubukla itelim. Sivri uçlu çubuğun,

$$y = \begin{cases} e^{-1/x} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

eğrisi yörüngesinde x-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen konik cismin çıkarılmasıyla bulunan cismi dikkate alalım.



Şekil 2.6.1.

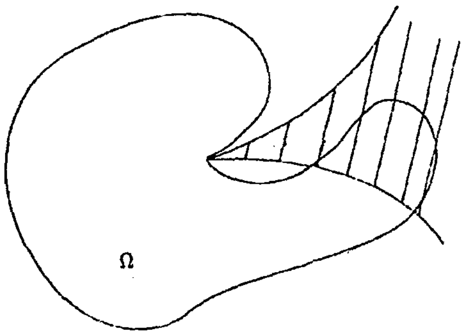
Değiştirilmiş kürenin iç bölgesi Ω olsun. Ω da bulunan homogen izotropik bir kütledeki ısı davranışını inceleyelim. $\partial\Omega$ üzerinde ısı dağılımı sürekli bir f fonksiyonu ile verilsin. f fonksiyonu uç noktada ($\partial\Omega$ üzerinde) sıfıra eşit, uç nokta dışında (Ω da) ise pozitif büyük bir T_0 sıcaklığına eşit olsun. Böylece Ω içindeki noktalarda, $u(x)$ durgun hal sıcaklığı T_0 a yakın olmalıdır. Fakat x sınıra yaklaştıkça uç noktada $u(x)$ in sıfıra yaklaşması imkansızdır. Uç nokta ısıyı, sıfırı çevreleyen noktalarda tutabilecek kadar yeterli alana sahip değildir. Dirichlet probleminin çözümü, Ω nın kapanışı $\bar{\Omega}$ da sürekli olamayacağından çözüm mevcut değildir. (Şekil 2.6.1.).

Aşağıda verilecek olan koşul Dirichlet probleminin bir çözümünün varlığını garanti edecektir.

$$y = x^k \quad ; \quad x \geq 0 \quad , \quad k \geq 1$$

eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen konik tipi yüzeyi dikkate alalım. Keskin sınırlı yüzeylerin hacimleri k ile artar. Bu hacimler, sondalar olarak adlandırılır. $\mathbb{R}^3$ de Ω bölgelerinin bir sınıfı aşağıdaki koşulu sağlayacaktır.

Koşul P. Her $x \in \partial\Omega$ noktasına sondanın uç noktasının değdiği bazı sondalarla dokunulabilir öyle ki sondanın ucundan uzaklığı belli bir pozitif ρ sayısından büyük olmayacak şekilde sondadaki tüm noktalar Ω dışında kalsın. (Şekil 2.6.2.).



Şekil 2.6.2.

Teorem 2.6.3.(n = 3 için Varlık Teoremi): Eğer $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, P-koşulunu sağlayan sınırlı bir bölge ise Dirichlet problemi daima bir çözüme sahiptir.
Varlık teoremi, $n > 3$ için $\mathbb{R}^n$ deki bölgelere genişletilebilir. $n = 2$ için P-koşulundaki sondalar düz parçalarla birleştirilebilir.

2.7. Birim Dairede Dirichlet Problemin Çözümü. Fourier Serileri ve Poisson İntegrali

Bu kısımda, birim dairede Dirichlet problemi çözülecektir. Problem için kutupsal koordinatları kullanmak daha uygundur. Birim daire

$$\Omega = B(0,1) = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le r < 1 \ , \ -\pi \le \theta \le \pi\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Dirichlet problemi; $f \in C^0(\partial\Omega)$ olmak üzere

$$\Delta u(r,\theta) = 0 \quad , \quad 0 \le r < 1 \ , \ -\pi \le \theta \le \pi \tag{2.7.1}$$

$$u(1,\theta) = f(\theta) \quad , \quad -\pi \le \theta \le \pi \tag{2.7.2}$$

denklemlerini sağlayan ve $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ olan bir $u(r,\theta)$ fonksiyonunun bulunması olarak tanımlanmıştı. Kısım 2.3. de değişkenlerine ayırma metodu ile elde edilen

$$r^n \cos n\theta \quad , \quad r^n \sin n\theta \quad ; \quad n = 0, 1, ... \tag{2.7.3}$$

harmonik fonksiyonlarının lineer kombinasyonu kullanılarak (2.7.1) ve (2.7.2) ile tanımlanan problemin çözümü elde edilecektir. (2.7.3) deki her fonksiyon $\mathbb{R}^2$ de harmoniktir. Özel olarak herbiri (2.7.1) i sağlar.

$$u(r,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \tag{2.7.4}$$

şeklinde bir seri ile ifade edilebilen çözümü kabul ederek Dirichlet probleminin çözümünü arayalım ($\frac{A_0}{2}$ terimindeki $\frac{1}{2}$ çarpanı ileride kolaylık sağlamak içindir). Bu durumda $n = 0, 1, ...$ için A_n ve B_n katsayılarını belirleyelim. (2.7.4) deki seri yakınsak olup

$C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ de olan, (2.7.1) ve (2.7.2) denklemlerini sağlayan bir $u(r,\theta)$ fonksiyonu tanımlar.

Eğer, $n = 0, 1, ...$ için (2.7.4) deki A_n ve B_n katsayıları sınırlı ise veya başka bir deyişle

$$|A_n| \leq M \quad , \quad |B_n| \leq M \quad ; \quad n = 0, 1, ... \tag{2.7.5}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti varsa (2.7.4) serisi Ω da harmonik bir fonksiyona yakınsar. Katsayıların değerleri (2.7.2) sınır koşulundan belirlenir. (2.7.4) ün (2.7.2) yi sağlama koşulundan

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \quad , -\pi \leq \theta \leq \pi \tag{2.7.6}$$

dır. İlk olarak $f(\theta)$ nın

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

trigonometrik polinom şeklini alalım. Bu durumda (2.7.4) deki katsayılar

$$A_n = a_n \quad , \quad B_n = b_n \quad ; \quad n = 0, 1, ..., N \quad \text{için} \quad ,$$
$$A_n = B_n = 0 \quad ; \quad n = N+1, N+2, ... \quad \text{için}$$

olarak seçilmelidir. (2.7.1) ve (2.7.2) nin çözümü

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

dır. Eğer,

$$f(\theta) = -1 + 2\cos\theta + 5\sin 3\theta$$

ise (2.7.1) ve (2.7.2) nin çözümü

$$u(r,\theta) = -1 + 2r\cos\theta + 5r^3 \sin 3\theta$$

dır.

$f(\theta)$ nın keyfi olarak verildiği genel durumlarda, $n = 0, 1, ...$ için $\cos n\theta, \sin n\theta$ trigonometrik fonksiyonlarının bir serisi olan $f(\theta)$ yı ifade etmeliyiz.
Özel olarak, $n = 0, 1, ...$ için a_n ve b_n katsayılarını öyle bulmalıyız ki

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \tag{2.7.7}$$

trigonometrik serisi $-\pi \leq \theta \leq \pi$ için $f(\theta)$ ya yakınsasın. Buradan

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \tag{2.7.8}$$

yazılabilir. Eğer $f(\theta)$ kesin koşulları sağlarsa (2.7.8) gösterimi mümkündür. Kabul edelim ki $f(\theta)$, (2.7.8) formunda ifade edilebilsin. Bu durumda (2.7.4) deki katsayıların

$$A_n = a_n \quad , \quad B_n = b_n \quad ; \quad n = 0, 1, ..., \qquad \text{için}$$

olarak seçilmesi gerektiği açıktır.

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \tag{2.7.9}$$

ise (2.7.1) ve (2.7.2) ile tanımlanan Dirichlet probleminin çözümü olacaktır.

Trigonometrik bir seri yardımıyla verilen bir fonksiyonu çözüm kabul eden problem uzun bir tarihe sahiptir. İlk olarak Daniel Bernoulli (1700-1782), dalga denkleminin çözümlerini bulmaya çalışırken dikkate almıştır. 1824 de Fourier, (2.7.8) gösteriminin kesin koşulları sağlayan f fonksiyonları için geçerli olduğunu ispatlamıştır. Bu nedenle (2.7.7) trigonometrik serisi, *Fourier serisi* olarak bilinir.

$f \in C^0(\partial\Omega)$ kabulünün anlamı, f nin sadece $[-\pi, \pi]$ aralığında sürekli olması olmayıp aynı zamanda $f(\pi) = f(-\pi)$ olmasıdır.

$$\partial\Omega = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \ r = 1 \ , \ -\pi \leq \theta \leq \pi\right\}$$

birim dairenin sınırıdır. Eğer, $f(\pi) \neq f(-\pi)$ ise f, $\partial\Omega$ nın $(1, \mp\pi)$ noktasında sıçramalı bir süreksizliğe sahip olacaktır. Bu ise, f nin $\partial\Omega$ üzerinde sürekli olma varsayımının tersidir.

Kabul edelim ki; f nin f' türevi $[-\pi, \pi]$ aralığında parçalı sürekli olsun. Bunun anlamı $f(\theta)$ nın sonlu sıçramalara sahip olabileceği sonlu noktaların dışında $f'(\theta)$ nın bu aralıkta sürekli olmasıdır. $n = 0, 1, ...$ için f nin Fourier katsayıları olan a_n ve b_n ler

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta \, d\theta \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta \, d\theta \tag{2.7.10}$$

şeklinde ise (2.7.7) Fourier serisi $f(\theta)$ ya $-\pi \leq \theta \leq \pi$ aralığında düzgün yakınsar ve (2.7.8) gösterimi geçerlidir.

Şimdi, (2.7.1) ve (2.7.2) ile verilen Dirichlet probleminin çözümünün gerçekten (2.7.9) olup olmadığını incelenebilir. (2.7.10) ile verilen f nin Fourier katsayıları $2\max|f|$ ile sınırlıdır. Bu nedenle (2.7.9) serisi Ω da harmonik bir fonksiyona yakınsar. Bundan dolayı (2.7.9) ile verilen $u(r,\theta) \in C^2(\Omega)$ dir ve (2.7.1) denklemini sağlar.

$-\pi \leq \theta \leq \pi$ için (2.7.8) deki seri $f(\theta)$ ya düzgün yakınsadığından (2.7.9) daki seri $\bar{\Omega}$ da düzgün yakınsaktır. (2.7.9) daki her terim, (2.7.8) de karşılık gelen terimin r^n ile çarpılmasıyla elde edilmiştir ve $\bar{\Omega}$ da $r^n \leq 1$ dir. (2.7.9) da $r = 1$ alınırsa (2.7.8) elde edilir ki bu ise (2.7.2) sınır koşulunun sağlandığını gösterir.

Teorem 2.7.1. f', $[-\pi, \pi]$ aralığında parçalı sürekli ve $f \in C^0(\partial\Omega)$ olsun. (2.7.1) ve (2.7.2) ile verilen Dirichlet probleminin $u(r,\theta)$ çözümü, (2.7.10) ile verilen f nin Fourier katsayıları kullanılarak (2.7.9) serisi ile verilir.

Örnek 2.7.1. Aşağıdaki Dirichlet probleminin çözümünü bulunuz.

$$\Delta u(r,\theta) = 0 \quad , \quad 0 \leq r < 1 \, , \; -\pi \leq \theta \leq \pi$$
$$u(1,\theta) = |\theta| \quad , \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

Çözüm: Bu örnekte $f(\theta) = |\theta|$ olup bu fonksiyon $\partial\Omega$ da süreklidir ve

$$f'(\theta) = \begin{cases} -1 \; , & -\pi < \theta < 0 \\ 1 \; , & 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

türevi $[-\pi, \pi]$ aralığında parçalı süreklidir. Bu nedenle, Teorem 2.7.1. uygulanabilirdir. (2.7.10) kullanılarak $f(\theta) = |\theta|$ nın Fourier serisi

$$|\theta| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos n\theta \quad , \quad -\pi \le \theta \le \pi$$

şeklindedir. Buradan yukarıda verilen Dirichlet probleminin çözümü

$$u(r, \theta) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} r^n \cos n\theta$$

şeklinde elde edilir..

$f'(\theta)$ nın parçalı sürekli olma varsayımını ihmal edelim. Bu durumda (2.7.10) ile verilen f nin Fourier katsayıları $2\max|f|$ ile sınırlı olduğundan, (2.7.9) serisi hâlâ Ω da harmonik bir fonksiyona yakınsar. Bununla birlikte $\partial\Omega$ üzerinde $r = 1$ olduğundan (2.7.9) serisi $\partial\Omega$ üzerinde düzgün yakınsamayabilir. $f(\theta)$ nın Fourier serisi sürekli kabul edilmişti. Fourier serileri yakınsak olmayan sürekli fonksiyonlar vardır. Bu zorluktan kaçınmak için; $r < 1$ için (2.7.9) serisi ile verilen, $r = 1$ için $f(\theta)$ ya eşit olan bir $u(r, \theta)$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda $u(r, \theta)$ nın $\bar{\Omega}$ da sürekli olduğu ve problemin aranılan çözümü olduğu kolayca görülebilir. Bu sonucu aşağıdaki teoremle verelim.

Teorem 2.7.2. $f \in C^0(\partial\Omega)$ olsun. f nin Fourier katsayıları (2.7.10) ile verilmek üzere (2.7.1) ve (2.7.2) ile tanımlanan Dirichlet probleminin çözümü

$$u(r, \theta) = \begin{cases} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) & , \quad r < 1 \text{ için} \\ f(\theta) \quad , \quad r = 1 & \text{için} \end{cases} \tag{2.7.11}$$

şeklindedir.

Şimdi, (2.7.1) ve (2.7.2) ile tanımlanan Dirichlet probleminin çözümünü serisel formdan başka bir integral yardımıyla gösterelim. $r < 1$ olmak üzere a_n ve b_n Fourier katsayılarının formülleri (2.7.9) da yazılırsa

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\, d\phi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos n\phi \cos n\theta \, d\phi + \int_0^{2\pi} f(\phi)\sin n\phi \sin n\theta\right. \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\, d\phi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} f(\phi)\cos n(\theta-\phi)\, d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta-\phi)\right] d\phi
\end{aligned}
$$

bulunur. r_1, 1 den küçük herhangi bir sayı olmak üzere $r \le r_1$ için köşeli parantez içindeki seri düzgün yakınsak olduğundan integral ile toplam yer değiştirdi. Eğer

$$
P(r,\xi) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\xi\right) \tag{2.7.12}
$$

denirse,

$$
u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} f(\phi)\, P(r,\theta-\phi)\, d\phi \tag{2.7.13}
$$

bulunur. Buradaki $P(r,\xi)$ fonksiyonuna *Poisson çekirdeği* denir. $P(r,\xi)$ ile gösterilen (2.7.12) deki serinin toplamı aşağıdaki şekilde bulunur. z kompleks değişkeni göstermek üzere kutupsal koordinatlarda

$$
z = r\, e^{i\xi} = r(\cos\xi + i\sin\xi) \quad , \quad |z| = r
$$

olsun. Bu durumda

$$
z^n = r^n\, e^{in\xi} = r^n(\cos n\xi + i\sin n\xi) \quad , \quad |z| = r
$$

ve

$$
1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\xi = \mathrm{Re}(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n) \quad ; \quad |z| < 1
$$

dir. Ayrıca

$$
\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad ; \quad |z| < 1
$$

olduğundan

$$\frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \quad ; \qquad |z| < 1$$

dir. Bu nedenle

$$P(r,\xi) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{1+r\,e^{i\xi}}{1-r\,e^{i\xi}}\right) \quad , \quad r<1 \tag{2.7.14}$$

olup buradan kısa bir hesapla

$$P(r,\xi) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\xi} \quad , \quad r<1 \tag{2.7.15}$$

bulunur. Bu değer (2.7.13) de yazılırsa, $r<1$ için integral formülü

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)\, f(\phi)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\phi)}\, d\phi \tag{2.7.16}$$

şeklinde bulunur. Elde edilen bu sonuç, *Poisson integrali* olarak adlandırılır. $f \in C^0(\partial\Omega)$ olmak üzere direkt bir hesapla Poisson integralinin, Ω $(r<1)$ da harmonik bir fonksiyon tanımladığı gösterilebilir. $r<1$ için (r,θ) noktası sınırdaki herhangi bir $(1,\theta_0)$ noktasına yaklaşırken, Poisson integrali $f(\theta_0)$ değerine yönelir. Bu yüzden; $r<1$ için Poisson integrali ile, $r=1$ olduğu zaman $f(\theta)$ ya eşit olarak tanımlanan $u(r,\theta)$ fonksiyonu $\bar{\Omega}$ da süreklidir. Bu ise istenilen çözümdür.

Teorem 2.7.3. $f \in C^0(\partial\Omega)$ olsun. (2.7.1) ve (2.7.2) ile tanımlanan Dirichlet probleminin $u(r,\theta)$ çözümü,

$$u(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)\, f(\phi)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\phi)}\, d\phi \;, & r<1 \text{ için} \\ f(\theta) \quad , \quad r=1 & \text{için} \end{cases} \tag{2.7.17}$$

şeklindedir.

Orijin merkezli ve a yarıçaplı bir daire için Dirichlet probleminin çözümü, birim daire için Dirichlet probleminin çözümümden kolaylıkla elde edilir. Benzerlik dönüşümü altında harmonik bir fonksiyon harmoniklik özelliğini koruduğundan, $B(0,1)$ için elde edilen serisel çözümde r yerine $\dfrac{r}{a}$ alınarak $B\,(0,a)$ için

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta) \tag{2.7.18}$$

serisel çözümü bulunur. Aynı şekilde $B\,(0,1)$ için Poisson integral çözümünde uygun dönüşümler yapılırsa $B\,(0,a)$ için Poisson integral çözümü

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(a^2-r^2\right)f\,(\phi)}{a^2+r^2-2ar\cos\left(\theta-\phi\right)}\,d\phi \tag{2.7.19}$$

olarak bulunur.

3. HARMONİK FONKSİYONLARIN DİĞER BAZI ÖZELLİKLERİ

3.1. Green Fonksiyonu Yardımıyla Dirichlet Probleminin Çözümü

Bu kısımda, Dirichlet probleminin çözümü için bir integral formülü elde edilecektir. Bu formül Green fonksiyonu olarak bilinen bir fonksiyon içerir. Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de verilen formülün ayrıntıları verilecektir. Problemde sadece $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ şeklindeki çözüm aransa bile Dirichlet probleminin u çözümünün $C^2(\bar{\Omega})$ da bulunduğu kabul edilmelidir.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sınırlı, normal bir bölge olmak üzere, $u \in C^2(\bar{\Omega})$ fonksiyonu Ω da harmonik olsun. $\vec{r}$, Ω da herhangi belirli bir nokta ve $\vec{r}'$ ise $\partial\Omega$ üzerinden integrasyonun değişken noktası olmak üzere Teorem 2.5.1. den

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|} \frac{\partial u(\vec{r}')}{\partial n} - u(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|} \right] d\sigma \qquad (3.1.1)$$

dır. Bu formül u nun herhangi bir $\vec{r} \in \Omega$ noktasındaki değerini, $\partial\Omega$ üzerinde $\frac{\partial u}{\partial n}$ ve u nun değerleri cinsinden verir. Dirichlet probleminde, $\partial\Omega$ sınırında sadece u nun değeri bilinir. Bu zorluktan kurtulmak için $C^2(\bar{\Omega})$ da bulunan ve Ω da harmonik olan bir h fonksiyonunu dikkate alalım. h ve u fonksiyonlarına ikinci Green özdeşliği uygulandığında

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left[h(\vec{r}') \frac{\partial u(\vec{r}')}{\partial n} - u(\vec{r}') \frac{\partial h(\vec{r}')}{\partial n} \right] d\sigma \qquad (3.1.2)$$

elde edilir. (3.1.1) ve (3.1.2) taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} u(\vec{r}) \;=\; & \int_{\partial\Omega} \left\{ \left[\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|} + h(\vec{r}') \right] \frac{\partial u(\vec{r}')}{\partial n} \right. \\ & \left. - u(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|} + h(\vec{r}') \right] \right\} d\sigma \qquad (3.1.3) \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $\vec{r}' \in \partial\Omega$ için $h(\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|}$ ise

$$u(\vec{r}) = -\int_{\partial\Omega} u(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|} + h(\vec{r}')\right] d\sigma \qquad (3.1.4)$$

olacaktır. $\vec{r}'$ ye göre Laplace operatörü Δ' olmak üzere ve $\vec{r} \in \Omega$ için

$$\Delta' h(\vec{r}') = 0 \quad , \qquad \vec{r}' \in \Omega \qquad (3.1.5)$$

$$h(\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|} \quad , \qquad \vec{r}' \in \partial\Omega \qquad (3.1.6)$$

Dirichlet problemini sağlayan bir $h \in C^2(\bar{\Omega})$ fonksiyonu bulabilmek şartıyla, (3.1.4) formülü Dirichlet probleminin u çözümünün her $\vec{r} \in \Omega$ noktasındaki değerini verir. (3.1.5) ve (3.1.6) ile verilen problemin çözümü $\vec{r}$ ye de bağlıdır ki bu çözüm $h(\vec{r}', \vec{r})$ şeklinde gösterilmiştir. (3.1.4) formülünde köşeli parantez içindeki fonksiyon Green fonksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.1. Ω, $\mathbb{R}^3$ de bir bölge olsun. Her $\vec{r} \in \Omega$ için $h(\vec{r}', \vec{r})$, (3.1.5) ve (3.1.6) denklemlerini sağlamak üzere

$$G(\vec{r}', \vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|} + h(\vec{r}', \vec{r}) \quad ; \quad \vec{r}', \vec{r} \in \bar{\Omega} \ , \quad \vec{r}' \neq \vec{r} \qquad (3.1.7)$$

fonksiyonu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ deki Dirichlet problemi için *Green fonksiyonu* olarak tanımlanır.

Green fonksiyonu kullanılarak (3.1.4) formülü

$$u(\vec{r}) = -\int_{\partial\Omega} u(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial n}G(\vec{r}', \vec{r})d\sigma \quad , \quad \vec{r} \in \Omega \qquad (3.1.8)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\Delta u = 0 \quad , \quad \Omega \text{ da} \qquad (3.1.9)$$

$$u = f \quad , \quad \partial\Omega \text{ üzerinde} \qquad (3.1.10)$$

Dirichlet probleminin çözümü

$$u(\vec{r}) = -\int_{\partial\Omega} f(\vec{r}\,')\frac{\partial}{\partial n}G(\vec{r}\,',\vec{r})\,d\sigma \quad , \quad \vec{r}\in\Omega \tag{3.1.11}$$

şeklindedir.

(3.1.9) ve (3.1.10) ile verilen Dirichlet probleminin (3.1.11) çözümü, $G(\vec{r}\,',\vec{r})$ Green fonksiyonunun ve problemin $u \in C^2(\bar{\Omega})$ çözümünün varolması kabulü altında elde edildi. Bundan başka, Ω da uygun koşullar altında Green fonksiyonu vardır ve $f \in C^0(\partial\Omega)$ olmak üzere (3.1.9) ve (3.1.10) ile verilen Dirichlet probleminin $u \in C^0(\bar{\Omega})$ çözümü (3.1.11) ile verilir (Kellogg 1953).

Green fonksiyonunun varlığı ilk olarak G. Green tarafından elektrostatikte fiziksel sebeplerden dolayı gözönüne alınmıştır.

İlk bakışta (3.1.11) formülünün kullanışlı olmadığı düşünülebilir. Çünkü (3.1.9) ve (3.1.10) ile tanımlanan Dirichlet probleminin çözümünde bu formülü kullanmak için, ilk olarak her $\vec{r}\in\Omega$ için (3.1.5) ve (3.1.6) ile verilen Dirichlet probleminin çözümü olan $G(\vec{r}\,',\vec{r})$ Green fonksiyonu bulunmalıdır. Ama bu son problem özel tip bir sınır verisi içerir. Bu nedenle (3.1.11) formülü, keyfi f verili Dirichlet problemini $-\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{\left|\vec{r}\,' - \vec{r}\right|}$ verili Dirichlet problemine indirger. Dirichlet problemi bir integral denklemin çözümünün problemine indirgendiğinden integral denklemler teorisindeki metodlar kullanılmalıdır. Sonuç olarak, Green fonksiyonu teorik Dirichlet probleminin çözümlerinin özelliklerini belirlemede kullanışlı bir araçtır. Çok basit bölgeler için Green fonksiyonunu açık olarak belirlemek mümkündür. Bir sonraki kısımda, $\mathbb{R}^3$ de bir küre için Green fonksiyonu belirlenecektir.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ deki bir Dirichlet problemi için $G(\vec{r}\,',\vec{r})$ Green fonksiyonunun özelliklerini inceleyelim. $\vec{r}\,'$ nün fonksiyonu olan $G(\vec{r}\,',\vec{r})$, tanımdan dolayı $\partial\Omega$ üzerinde yokolur ve Ω da ise $\vec{r}\,'=\vec{r}$ kutuplu harmoniktir. $\vec{r}\,'\to\vec{r}$ iken $\vec{r}\,'$ nün $\vec{r}$ den uzaklığının inversi gibi $G(\vec{r}\,',\vec{r}) \to +\infty$ dur. $G(\vec{r}\,',\vec{r})$ nün önemli bir özelliği $\vec{r}\,'$ ve $\vec{r}$ ye göre simetrikliğidir. Yani,

$$G(\vec{r}\,',\vec{r}) = G(\vec{r},\vec{r}\,') \;\; ; \quad \vec{r}\,',\vec{r}\in\Omega \;\; , \quad \vec{r}\,'\neq\vec{r} \tag{3.1.12}$$

dir. (3.1.12) den görülmektedir ki $\vec{r}$ nin fonksiyonu olan $G(\vec{r},\vec{r}')$, $\partial\Omega$ üzerinde yokolur ve Ω da $\vec{r}=\vec{r}'$ kutuplu harmoniktir. Sonuç olarak, (3.1.11) ile tanımlanan $u(\vec{r})$ fonksiyonu Ω da harmoniktir.

Tanım 3.1.2. Ω, $\mathbb{R}^2$ de bir bölge olsun.

$$G(\vec{r}',\vec{r}) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|} + h(\vec{r}',\vec{r}); \quad \vec{r}',\vec{r}\in\bar{\Omega} \ , \quad \vec{r}'\neq\vec{r} \tag{3.1.13}$$

fonksiyonu Ω da verilen Dirichlet problemi için Green fonksiyonu olarak adlandırılır öyle ki $h(\vec{r}',\vec{r})$ fonksiyonu her $\vec{r}\in\Omega$ için

$$\Delta' h(\vec{r}',\vec{r}) = 0 \quad , \qquad \vec{r}'\in\Omega \tag{3.1.14}$$

$$h(\vec{r}',\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|} \quad , \qquad \vec{r}'\in\partial\Omega \tag{3.1.15}$$

denklemlerini sağlar.

İki boyutlu Green fonksiyonunun özellikleri üç boyutludakilere benzerdir. Tek farkı $\vec{r}'\to\vec{r}$ iken $\vec{r}'$ nün $\vec{r}$ den uzaklığının inversinin logaritması gibi $G(\vec{r}',\vec{r})\to+\infty$ dur.

$n > 3$ olması durumunda $\mathbb{R}^n$ deki bölgeler için Green fonksiyonu benzer şekilde tanımlanır. $\vec{r}'\to\vec{r}$ iken $\dfrac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|^{n-2}}$ gibi $G(\vec{r}',\vec{r})\to+\infty$ dur.

3.2. Green Fonksiyonu ve Bir Küre İçin Dirichlet Probleminin Çözümü

Ω, $\mathbb{R}^3$ de $B(0,a)$ küresi ve $\vec{r}$ bu kürede sabit bir nokta olsun. $B(0,a)$ da verilen Dirichlet probleminin çözümünde Green fonksiyonunu belirlemek için; $\vec{r}'$ nün fonksiyonu, $B(0,a)$ da harmonik ve $S(0,a)$ sınırında $\vec{r}'$ için $-\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|}$ ye eşit olan bir $h(\vec{r}',\vec{r})$ fonksiyonu belirlenmelidir.

$$\frac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|} \tag{3.2.1}$$

fonksiyonu $B(0,a)$ küresinde $\vec{r}'=\vec{r}$ kutuplu harmoniktir. Örnek 2.3.4. den bu fonksiyonun $S(0,a)$ küresine göre inversi, $B(0,a)$ da harmonik ve $\vec{r}' \in S(0,a)$ için $\dfrac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|}$ ye eşit olan

$$\frac{1}{\left|\frac{a}{r'}\vec{r}' - \frac{r'}{a}\vec{r}\right|} \tag{3.2.2}$$

fonksiyonudur. Bundan dolayı, aranılan $h(\vec{r}', \vec{r})$ fonksiyonu

$$h(\vec{r}', \vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\left|\frac{a}{r'}\vec{r}' - \frac{r'}{a}\vec{r}\right|} \tag{3.2.3}$$

olup $B(0,a)$ da Green fonksiyonu ise

$$G(\vec{r}', \vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|} - \frac{1}{\left|\frac{a}{r'}\vec{r}' - \frac{r'}{a}\vec{r}\right|}\right] \tag{3.2.4}$$

şeklindedir.

$0 \leq \Theta \leq \pi$ olmak üzere Θ, $\vec{r}'$ ve $\vec{r}$ vektörleri arasındaki açı olmak üzere kosinüs teoremi uygulanarak

$$G(\vec{r}', \vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right] \tag{3.2.5}$$

elde edilir ki, burada

$$R = \left|\vec{r}' - \vec{r}\right| = \left(r'^2 + r^2 - 2r'r\cos\Theta\right)^{1/2} \tag{3.2.6}$$

$$R' = \left|\frac{a}{r'}\vec{r}' - \frac{r'}{a}\vec{r}\right| = \left(a^2 + \frac{r'^2}{a^2}r^2 - 2r'r\cos\Theta\right)^{1/2} \tag{3.2.7}$$

dir. Yukarıdaki son üç eşitlikten Green fonksiyonunun simetri özelliği açıkça görülmektedir.

$B(0,a)$ da verilen Dirichlet probleminin çözümünde (3.1.11) formülünü kullanmak için $S(0,a)$ sınırında $\dfrac{\partial}{\partial n}G(\vec{r}', \vec{r})$ dış normal türevi hesaplanmalıdır. $S(0,a)$ daki dış normal, radyal doğrultuda olduğundan

$$\left[\frac{\partial G(\vec{r}',\vec{r})}{\partial n}\right]_{r'\in S(0,a)} = \left[\frac{\partial G(\vec{r}',\vec{r})}{\partial r'}\right]_{r'=a} \tag{3.2.8}$$

olup basit bir hesapla

$$\left[\frac{\partial G(\vec{r}',\vec{r})}{\partial r'}\right]_{r'=a} = -\frac{1}{4\pi a}\frac{a^2-r^2}{(a^2+r^2-2ar\cos\Theta)^{3/2}} \tag{3.2.9}$$

elde edilir. $f\in C^0(S(0,a))$ olmak üzere

$$\Delta u(\vec{r}) = 0 \quad , \quad \vec{r}\in B(0,a) \tag{3.2.10}$$

$$u(\vec{r}) = f(\vec{r}) \quad , \quad \vec{r}\in S(0,a) \tag{3.2.11}$$

denklemlerini sağlayan $u\in C^2(B(0,a))\cap C^0(\bar{B}\,(0,a))$ fonksiyonunu arayan Dirichlet problemini dikkate alalım. Problemin u çözümü, (3.1.11) formülünden yararlanarak

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi a}\int\limits_{S(0,a)} \frac{(a^2-r^2)\,f(\vec{r}')}{(a^2+r^2-2ar\cos\Theta)^{3/2}}\,d\sigma \quad , \quad \vec{r}\in B(0,a) \tag{3.2.12}$$

şeklindedir. Bu çözümdeki integral *Poisson İntegrali* ve

$$P(\vec{r}',\vec{r}) = \frac{1}{4\pi a}\frac{a^2-r^2}{(a^2+r^2-2ar\cos\Theta)^{3/2}} \tag{3.2.13}$$

fonksiyonu ise *Poisson çekirdeği* olarak bilinir. Poisson çekirdeği kullanılarak (3.2.12) formülü

$$u(\vec{r}) = \int\limits_{S(0,a)} P(\vec{r}',\vec{r})f(\vec{r}')d\sigma \quad , \quad \vec{r}\in B(0,a) \tag{3.2.14}$$

şeklinde yazılır. (3.2.12) formülünü küresel koordinatlarda yazmak bazen kullanışlıdır. (r,θ,ϕ), $\vec{r}\in B(0,a)$ nın ve (a,θ',ϕ'), $S(0,a)$ üzerindeki $\vec{r}'$ değişken noktasının küresel koordinatlardaki gösterimi olmak üzere (3.2.12) formülü

$$u(r,\theta,\phi)=\frac{a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(a^2-r^2)\,f(\theta',\phi')}{(a^2+r^2-2ar\cos\Theta)^{3/2}}\sin\phi'\,d\phi' d\theta' \quad , \quad r<a$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\cos\Theta=\cos\phi\cos\phi'+\sin\phi\sin\phi'\cos(\theta-\theta') \tag{3.2.16}$$

dır.

Teorem 3.2.1. $f\in C^0(S(0,a))$ olmak üzere $u\in C^2(B(0,a))\cap C^0(\bar{B}(0,a))$ fonksiyonu (3.2.10) ve (3.2.11) ile tanımlanan Dirichlet probleminin çözümü olsun. Bu durumda, $P(\vec{r}',\vec{r})$ Poisson çekirdeği (3.2.13) ile tanımlanmak üzere u çözümü

$$u(\vec{r})=\begin{cases}\int\limits_{S(0,a)} P(\vec{r}',\vec{r})f(\vec{r}')d\sigma & , \quad r<a\\ f(\vec{r}) & , \quad r=a\end{cases} \tag{3.2.17}$$

ile verilir.

Bu teoremin ispatına geçmeden önce, Poisson çekirdeğinin aşağıdaki özellikleri bilinmelidir.

i) $P(\vec{r}',\vec{r})\geq 0 \quad ; \quad \vec{r}\in B(0,a) \quad , \quad \vec{r}'\in S(0,a)$.

ii) $\vec{r}'\in S(0,a)$ olmak üzere $P(\vec{r}',\vec{r})$, $\vec{r}\in B(0,a)$ değişkenine göre harmonik bir fonksiyondur.

iii) $\int\limits_{S(0,a)} P(\vec{r}',\vec{r})d\sigma=1 \quad , \quad$ her $\vec{r}\in\bar{B}(0,a)$.

i) özelliği $P(\vec{r}',\vec{r})$ nin (3.2.13) tanımından hemen görülmektedir. *ii)* özelliğinin doğruluğu, her $\vec{r}'\in S(0,a)$ için $\vec{r}\in B(0,a)$ değişkeninin harmonik bir fonksiyonu olan $G(\vec{r}',\vec{r})$ Green fonksiyonundan ve $\vec{r}'$ parametresini içeren $G(\vec{r}',\vec{r})$ Green fonksiyonunun diferensiyeli alınarak elde edilen $P(\vec{r}',\vec{r})$ den görülür. Son olarak *iii)* özelliği,

$$\begin{aligned}\Delta u(\vec{r}) &= 0 \ , \ \vec{r}\in B(0,a)\\ u(\vec{r}) &= 1 \ , \ \vec{r}\in S(0,a)\end{aligned}$$

şeklinde verilen Dirichlet probleminin $\vec{r} \in \bar{B}\,(0,a)$ için $u(\vec{r}) = 1$ çözümünden görülür. Bu çözüm $C^2(\bar{B}\,(0,a))$ da olduğundan (3.2.14) formülü geçerlidir. (3.2.14) ile birlikte $f = u = 1$, *iii)* özelliğinin özel bir halidir.

Teorem 3.2.1 in ispatı: Dirichlet probleminin çözümü tek olduğundan (3.2.17) ile tanımlanan $u(\vec{r})$ fonksiyonunun $B\,(0,a)$ da harmonik ve $\bar{B}\,(0,a)$ da sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. $u(\vec{r})$ fonksiyonu $B\,(0,a)$ da $P(\vec{r}\,', \vec{r})$ harmonik fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olduğundan $u(\vec{r})$, $B\,(0,a)$ da harmoniktir. Bu nedenle u nun $\bar{B}\,(0,a)$ da sürekli ve $u \in C^2\,(B\,(0,a))$ olduğu bilindiğinden her $\vec{r}_0 \in S\,(0,a)$ için

$$\lim_{\substack{\vec{r} \to \vec{r}_0 \\ \vec{r} \in B(0,a)}} u(\vec{r}) = f(\vec{r}_0) \tag{3.2.18}$$

olduğu gösterilmelidir. Daha açık olarak

$$\lim_{\substack{\vec{r} \to \vec{r}_0 \\ \vec{r} \in B(0,a)}} \int_{S(0,a)} P(\vec{r}\,', \vec{r}) f(\vec{r}\,') d\sigma = f(\vec{r}_0) \tag{3.2.19}$$

olduğu gösterilmelidir. $P(\vec{r}\,', \vec{r})$ nin *iii)* özelliğinden

$$\int_{S(0,a)} P(\vec{r}\,', \vec{r})\, f(\vec{r}_0)\, d\sigma = f(\vec{r}_0) \ , \quad \vec{r} \in B\,(0,a)$$

bulunur ve (3.2.19) eşitliği

$$\lim_{\substack{\vec{r} \to \vec{r}_0 \\ \vec{r} \in B(0,a)}} \int_{S(0,a)} P(\vec{r}\,', \vec{r}) \left[f(\vec{r}\,') - f(\vec{r}_0) \right] d\sigma = 0 \tag{3.2.20}$$

a denktir. f, $S\,(0,a)$ da sürekli ve sınırlı olduğundan

$$\left| f(\vec{r}\,') \right| \leq M \ , \quad \vec{r}\,' \in S\,(0,a) \tag{3.2.21}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Ayrıca f, $\vec{r}_0$ da sürekli olduğundan herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\left| f(\vec{r}') - f(\vec{r}_0) \right| < \varepsilon \quad , \quad \vec{r}' \in S\,(0,a) \quad , \quad \left| \vec{r}' - \vec{r}_0 \right| < \delta \tag{3.2.22}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. $C(\vec{r}_0, \delta), B(\vec{r}_0, \delta)$ küresi içindeki $S\,(0,a)$ sınır yüzeyi parçası yani

$$C(\vec{r}_0, \delta) = S\,(0,a) \cap B(\vec{r}_0, \delta)$$

olsun. Buradan (3.2.22),

$$\left| f(\vec{r}') - f(\vec{r}_0) \right| < \varepsilon \quad , \quad \vec{r}' \in C(\vec{r}_0, \delta) \tag{3.2.23}$$

olarak yazılabilir. (3.2.20) deki integrali

$$\begin{aligned} \int\limits_{S(0,a)} P(\vec{r}', \vec{r}) \left[f(\vec{r}') - f(\vec{r}_0) \right] d\sigma \; = & \int\limits_{C(\vec{r}_0,\delta)} P(\vec{r}', \vec{r}) \left[f(\vec{r}') - f(\vec{r}_0) \right] d\sigma \\ & + \int\limits_{S(0,a) - C(\vec{r}_0,\delta)} P(\vec{r}', \vec{r}) \left[f(\vec{r}') - f(\vec{r}_0) \right] d\sigma \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

şeklinde yazalım. (3.2.23) ü ve $P(\vec{r}', \vec{r})$ nin $i)$ ve $iii)$ özelliklerini kullanarak her $\vec{r} \in B\,(0,a)$ için

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_{C(\vec{r}_0,\delta)} P(\vec{r}', \vec{r}) \left[f(\vec{r}') - f(\vec{r}_0) \right] d\sigma \right| & \le \varepsilon \int\limits_{C(\vec{r}_0,\delta)} P(\vec{r}', \vec{r}) d\sigma \\ & \le \varepsilon \int\limits_{S(0,a)} P(\vec{r}', \vec{r}) d\sigma \\ & = \varepsilon \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

bulunur. ε keyfi pozitif bir sayı olduğundan

$$\lim_{\substack{\vec{r} \to \vec{r}_0 \\ \vec{r} \in B(0,a)}} \int\limits_{S(0,a) - C(\vec{r}_0,\delta)} P(\vec{r}', \vec{r}) \left[f(\vec{r}') - f(\vec{r}_0) \right] d\sigma = 0 \tag{3.2.26}$$

eşitliğinin doğruluğu ispatlanırsa (3.2.20) i elde edilecektir. (3.2.21) den

$$\left| \int_{S(0,a)-C\left(\vec{r}_0,\delta\right)} P(\vec{r}',\vec{r})\left[f(\vec{r}')-f(\vec{r}_0)\right]d\sigma \right| \leq 2M \int_{S(0,a)-C\left(\vec{r}_0,\delta\right)} P(\vec{r}',\vec{r})d\sigma$$

dir. Bu nedenle

$$\lim_{\substack{\vec{r}\to\vec{r}_0 \\ \vec{r}\in B(0,a)}} \int_{S(0,a)-C\left(\vec{r}_0,\delta\right)} P(\vec{r}',\vec{r})\,d\sigma = 0 \qquad (3.2.27)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $\vec{r}\to\vec{r}_0$ için inceleme yapıldığından $\vec{r}\in B(0,a)\cap B\left(\vec{r}_0,\frac{\delta}{2}\right)$ olduğu durumu dikkate alalım. Buradan $\vec{r}'\in\left[S(0,a)-C(\vec{r}_0,\delta)\right]$ için

$$\left|\vec{r}'-\vec{r}\right| \geq \left|\vec{r}'-\vec{r}_0\right| - \left|\vec{r}-\vec{r}_0\right| \geq \frac{\delta}{2}$$

ve

$$P(\vec{r}',\vec{r}) = \frac{1}{4\pi a}\frac{a^2-r^2}{\left|\vec{r}'-\vec{r}\right|^3} \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^3\frac{1}{4\pi a}\left(a^2-r^2\right)$$

dir. Sonuç olarak $\vec{r}\in B(0,a)\cap B(\vec{r}_0,\frac{\delta}{2})$ için

$$\int_{S(0,a)-C\left(\vec{r}_0,\delta\right)} P(\vec{r}',\vec{r})\,d\sigma \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^3\frac{1}{4\pi a}\left(a^2-r^2\right)\int_{S(0,a)} 1\,d\sigma = \left(\frac{2}{\delta}\right)^3 a\left(a^2-r^2\right)$$

dir. (a^2-r^2) çarpanından dolayı (3.2.27) sağlanır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Teoremin ispatında dikkat edilirse f nin $S(0,a)$ üzerinde her yerde sürekli olma koşulu pek kullanılmamıştır. Sadece f nin $S(0,a)$ da sınırlı ve $\vec{r}_0\in S(0,a)$ noktasında sürekli olması kullanılmıştır. f nin parçalı sürekli (f nin sonlu sıçramalara sahip olabileceği $S(0,a)$ üzerindeki eğrilerin sonlu sayıdaki noktaları hariç her yerde sürekli) olması koşulu altında (3.2.14) Poisson integrali, $\vec{r}\in B(0,a)$ için harmonik ve f nin sürekli olduğu her $\vec{r}_0\in S(0,a)$ noktasında

$$\lim_{\substack{\vec{r}\to\vec{r}_0 \\ \vec{r}\in B(0,a)}} u(\vec{r}) = f(\vec{r}_0)$$

olan bir $u(\vec{r})$ fonksiyonu tanımlar. Bu sonuç parçalı sürekli sınır koşulu ile verilen Dirichlet probleminin çözümünde (3.2.14) Poisson integralini kullanmayı mümkün kılar. Burada aranılan $u(\vec{r})$ çözümü $C^0\left(\bar{B}\,(0,a)\right)$ da değildir fakat $B\,(0,a)$ da harmonik ve $\vec{r}\to\vec{r}_0\in\ S\,(0,a)$ iken f nin sürekli olduğu her $\vec{r}_0\in\ S\,(0,a)$ noktasında aldığı değer $f(\vec{r}_0)$ a yaklaşır. Bu problemin basit bir örneği, f nin $S\,(0,a)$ nın üst yarım küresinde 1 ve alt yarım küresinde 0 a eşit olmasıdır.

3.3. Harmonik Fonksiyonların İleri Özellikleri

$\mathbb{R}^n$ de bir yuvar için verilen Dirichlet probleminin Poisson integral çözümü, içerdiği oldukça karışık integrallerden dolayı çözümün yuvar içindeki gerçek değerlerini hesaplamada çok kullanışlı değildir. Ama Poisson integralinin harmonik fonksiyonların önemli özelliklerini elde etmede çok kullanışlı olduğu bu kısımda görülecektir.

u, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ de harmonik bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki, $\bar{B}$, Ω da olmak üzere B herhangi bir yuvar olsun. u fonksiyonunun B deki her noktadaki değeri, B nin S sınırındaki u fonksiyonunun değerlerini içeren Poisson integrali ile verilsin. Koordinatların bir dönüşümü altında bir fonksiyonun harmonikliği değişmediğinden B nin merkezi daima orijin olarak alınabilir. Bu durumda $\bar{B}\ (0,a)$ kapanışı, u nun harmonik olduğu Ω bölgesinde bulunan $B\,(0,a)$ yuvarını dikkate alalım. O halde; $P(\vec{r}\,',\vec{r})$ Poisson çekirdeği ve $\vec{r}\,'$, $S\,(0,a)$ üzerinden integrasyonun değişken noktası olmak üzere her $\vec{r}\in B\,(0,a)$ için

$$u(\vec{r}) = \int_{S(0,a)} P(\vec{r}\,',\vec{r})\,u(\vec{r}\,')\,d\sigma \tag{3.3.1}$$

dir. Bir önceki kısımda $n=2$ ve $n=3$ için $P(\vec{r}\,',\vec{r})$ ifadeleri elde edilmişti. $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ nün kutupsal koordinatları sırasıyla (r,θ) , (a,ϕ) ve Θ ise $\vec{r}$ ve $\vec{r}\,'$ arasındaki açı olmak üzere, $n=2$ için

$$P(\vec{r}', \vec{r}) = \frac{1}{2\pi a} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \phi)} \tag{3.3.2}$$

ve $n = 3$ için

$$P(\vec{r}', \vec{r}) = \frac{1}{4\pi a} \frac{a^2 - r^2}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\Theta)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.3.3}$$

şeklindedir. $n > 3$ için ise benzerdir.

Bu kısımda belirtilecek olan iki teorem tüm n ler için geçerlidir. (3.3.1) Poisson integraline dayanan bu teoremlerin ispatları n nin farklı değerleri için küçük detaylarla değişir. Bu kısımda $n = 2$ veya $n = 3$ için ispatları verilecektir.

Teorem 3.3.1.(Liouville Teoremi): Her $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ için harmonik olan $u(\vec{r})$ fonksiyonu sabit olmadıkça bir üst ya da alt sınıra sahip olamaz.

İspat: Teoremin ispatı $n = 2$ için verilecektir. Kabul edelim ki $u(\vec{r})$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^2$ de harmonik ve bir alt sınıra sahip olsun. Yani, her $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ için $u(\vec{r}) \geq M$ olacak şekilde bir M sayısı vardır. $\mathbb{R}^2$ de $u(\vec{r}) = sabit$ olduğu gösterilmelidir.
$u'(\vec{r}) = u(\vec{r}) - M$ fonksiyonu da $\mathbb{R}^2$ de harmonik ve her $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ için $u'(\vec{r}) \geq 0$ dır. Eğer $\mathbb{R}^2$ de $u'(\vec{r}) = sabit$ olduğu gösterilirse buradan $\mathbb{R}^2$ de $u(\vec{r}) = sabit$ olduğu görülecektir. Şimdi üsleri atalım. Bu durumda $u(\vec{r})$ nin harmonik ve her $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ için $u(\vec{r}) \geq 0$ olduğunu kabul edelim. Her $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ için $u(\vec{r}) = u(0)$ ve buradan $u(\vec{r})$ nin sabit olduğunu gösterelim.

$\vec{r}$, $\mathbb{R}^2$ de belirli bir nokta ve a, $r = \left|\vec{r}\right|$ den büyük bir sayı olsun öyle ki $B(0, a)$ çemberi $\vec{r}$ yi içersin. Bu durumda (3.3.1) ve (3.3.2) den

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \phi)} u(a, \phi)\, d\phi \tag{3.3.4}$$

şeklindedir. $-1 \leq \cos(\theta - \phi) \leq 1$ olduğundan

$$\frac{a - r}{a + r} \leq \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \phi)} \leq \frac{a + r}{a - r}$$

ve $u(a, \phi) \geq 0$ olduğundan

$$\frac{a-r}{a+r}\,u\,(a,\phi) \le \frac{a^2-r^2}{a^2+r^2-2ar\cos(\theta-\phi)}\,u\,(a,\phi) \le \frac{a+r}{a-r}\,u\,(a,\phi)$$

dir. (3.3.4) ü de gözönünde tutarak ϕ ye göre integrasyonla

$$\frac{a-r}{a+r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,(a,\phi)\;d\phi \le u(\vec{r}) \le \frac{a+r}{a-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,(a,\phi)\;d\phi$$

elde edilir. Harmonik fonksiyonlar verilen ortalama değer teoremi kullanılarak

$$\frac{a-r}{a+r}\,u\,(0) \le u(\vec{r}) \le \frac{a+r}{a-r}\,u\,(0)$$

bulunur. $a \to \infty$ için

$$u\,(0) \le u(\vec{r}) \le u\,(0)$$

elde edilir. Bu nedenle $u(\vec{r}) = u\,(0)$ dır. Buradan görülmektedir ki $u(\vec{r})$ bir alt sınıra sahipse, $u(\vec{r})$ sabit bir fonksiyondur. Eğer $u(\vec{r})$ bir üst sınıra sahipse $-u(\vec{r})$ bir alt sınıra sahip olacaktır. Sonuç olarak $-u(\vec{r})$ ve dolayısıyla da $u(\vec{r})$ sabit bir fonksiyondur. Teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Sonuç 3.3.1. Sınırlı ve $\mathbb{R}^n$ de harmonik olan tüm fonksiyonlar sabit fonksiyonlardır.

Dirichlet probleminin Poisson integral çözümünden bulunan diğer önemli bir sonuç ise harmonik bir fonksiyonun tanım bölgesinde analitikliği gerektirmesidir.(u fonksiyonu, Ω daki her noktanın komşuluğunda u ya yakınsayan bir Taylor serisine sahipse $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de analitiktir.)

Teorem 3.3.2: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de harmonik olan bir u fonksiyonu Ω da analitiktir.

İspat: Teoremin ispatı $n = 3$ için verilecektir. Q, Ω da herhangi bir nokta olsun. u nun Q da harmonik olduğu gösterilmelidir. Harmoniklik ve analitiklik, koordinat dönüşümü altında değişmediğinden Q noktası orijin olarak kabul edilebilir. Bundan dolayı, u nun orijinin bir komşuğundaki (x, y, z) için geçerli olan

$$u(x,y,z) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} a_{ijk}x^i y^j z^k \tag{3.3.5}$$

Taylor seri açılımına sahip olduğu gösterilmelidir. Bunu göstermek için orijin komşuluğundaki u nun Poisson integral gösterimi kullanılacaktır. $\bar{B}\,(0,a) \subset \Omega$ olacak şekilde $a > 0$ yeterince küçük olsun. $P(\vec{r}\,', \vec{r})$, (3.3.3) ile verilmek üzere $u(\vec{r})$ her $\vec{r} \in B\,(0,a)$ için (3.3.1) ile verilir. $\vec{r} = (x,y,z)$ ve $\vec{r}\,' = (\xi,\eta,\zeta)$ olmak üzere kabul edelim ki, Poisson çekirdeği

$$P(\vec{r}\,', \vec{r}) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} b_{ijk}(\xi,\eta,\zeta)\, x^i y^j z^k \tag{3.3.6}$$

şeklinde bir Taylor serisi ile gösterilebilsin. $\delta > 0$ olmak üzere seri, $(x,y,z) \in B\,(0,\delta)$ için düzgün yakınsar ve $(\xi,\eta,\zeta) \in S\,(0,a)$ dır. (3.3.6), (3.3.1) de yerine yazılır ve ((3.3.6) düzgün yakınsak olduğundan dolayı) integrasyon ile toplamın sırası değiştirilirse $(x,y,z) \in B\,(0,\delta)$ için geçerli olan (3.3.5) e karşılık gelir.

$$P(\vec{r}\,', \vec{r}) = \frac{a^2 - r^2}{4\pi a^4}\left[1 - \frac{2ar\cos\Theta - r^2}{a^2}\right]^{-3/2}$$

ve $a^2 - r^2 = a^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$ bir polinom olduğundan

$$\left[1 - \frac{2ar\cos\Theta - r^2}{a^2}\right]^{-3/2} = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} c_{ijk}(\xi,\eta,\zeta)\, x^i y^j z^k \tag{3.3.7}$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir. $\delta > 0$ olmak üzere seri, $(x,y,z) \in B\,(0,\delta)$ için düzgün yakınsar ve $(\xi,\eta,\zeta) \in S\,(0,a)$ dır. Bunun için, $\alpha_0 = 1$ ve tüm m ler için $\alpha_m > 0$ olmak üzere

$$[1 - w]^{-3/2} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m w^m \tag{3.3.8}$$

binom açılımı kullanılacaktır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki seri, $p < 1$ olmak üzere $|w| \le p$ için mutlak ve düzgün yakınsar.

$$w = \frac{2ar\cos\Theta - r^2}{a^2} \tag{3.3.9}$$

ve $\vec{r} \in B\,(0,a)$ ise

$$|w| = \frac{|2ar\cos\Theta - r^2|}{a^2} \le \frac{2ar + r^2}{a^2} = \frac{2a + r}{a^2} r \le \frac{3}{a} r$$

dir. Eğer $\vec{r}$, $B(0, \frac{a}{4})$ içinde olacak şekilde kısıtlanırsa

$$|w| \leq \frac{3}{4} \quad ; \ (x, y, z) \in B(0, \frac{a}{4}) \quad \text{ve} \quad (\xi, \eta, \zeta) \in S(0, a)$$

dir. Bundan dolayı

$$\left[1 - \frac{2ar\cos\Theta - r^2}{a^2}\right]^{-3/2} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m w^m \tag{3.3.10}$$

dir. Seri, $(x, y, z) \in B(0, \frac{a}{4})$ için düzgün yakınsar ve $(\xi, \eta, \zeta) \in S(0, a)$ dır. (3.3.9) dan

$$w = \frac{1}{a^2}\left[2(\xi x + \eta y + \zeta z) - (x^2 + y^2 + z^2)\right]$$

olup (3.3.10) daki seri, pozitif katsayılı polinomların bir serisidir. Kompleks değişkenli analitik fonksiyonlar teorisinden bilinen sonuç kullanılırsa; (3.3.10) daki seri $[2(\xi x + \eta y + \zeta z) - (x^2 + y^2 + z^2)]^m$ açılımıyla tekrar düzenlenir ve $x^i y^j z^k$ formundaki terimler gruplandırılırsa (3.3.7) ifadesi elde edilir. Burada seri yine, $(x, y, z) \in B(0, \frac{a}{4})$ için düzgün yakınsak ve $(\xi, \eta, \zeta) \in S(0, a)$ dır. Teoremin ispatı tamamlanmıştır.

3.4. Sınırsız Bölgelerde Dirichlet Problemi

Buraya kadar, Laplace denkleminin sağlandığı bir Ω bölgesinin sınırlı olması durumunda Dirichlet problemi incelendi. Bu kısımda görülecektir ki; sınırsız bir bölgedeki Dirichlet problemini sınırlı bir bölgedeki Dirichlet problemine dönüştürmek için, sınırsız bölgedeki çözümün sonsuzda kesin bir koşulu sağlaması şartıyla bir küreye göre inversiyonun kullanılması mümkündür.

Eğer çözümün hiçbir ek koşulu sağlaması gerekmiyorsa, sınırsız bir bölgedeki Dirichlet problemi için çözümün tekliğinin gerçeklenemeyeceğini gösteren basit bir örneği inceleyelim:

Ω, $\mathbb{R}^n$ deki birim yuvarın tümleyeni yani $\Omega = \mathbb{R}^n - \bar{B}\,(0, 1)$ olsun.

$$\Delta u(\vec{r}) = 0 \ , \ \vec{r} \in \Omega \tag{3.4.1}$$

$$u(\vec{r}) = 1 \ , \ \vec{r} \in \partial\Omega = S\,(0,1) \tag{3.4.2}$$

denklemlerini sağlayan $u \in C^2\,(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ fonksiyonunu çözüm kabul eden Dirichlet problemini dikkate alalım.

$$u_1(\vec{r}) = 1 \quad , \quad u_2(\vec{r}) = 1 \ + \ln r \quad , \quad n = 2$$

ve

$$u_1(\vec{r}) = 1 \quad , \quad u_2(\vec{r}) = r^{2-n} \quad , \quad n \geq 3$$

fonksiyonlarının problemin çözümü olduğunu görmek kolaydır. Bu iki çözümün lineer kombinasyonu ise problemin sonsuz sayıdaki çözümüne karşılık gelir.

Bu durumda sınırsız bölgedeki Dirichlet probleminin u çözümünün tekliğini garanti etmek için ek koşul ne olmalıdır? Görüleceği üzere bu ek koşul, bir küreye göre inversiyon metodu sınırsız bir bölgedeki Dirichlet problemini sınırlı bir bölgede tanımlanan Dirichlet problemine dönüştürmek için kullanıldığında doğal olarak ortaya çıkacaktır. Koşul, r nin büyük değerleri için $u(\vec{r})$ nin davranışını sınırlar ve bu nedenle sonsuzdaki koşul (sınır koşulu) olarak adlandırılır.

Yukarıdaki örnekteki bölge bir dış bölge olarak bilinir. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sınırlı bir bölgenin kapanışının tümleyeni ise Ω dış bölge olarak adlandırılır. Bir başka deyişle, G

$$\Omega = \mathbb{R}^n - \bar{G}$$

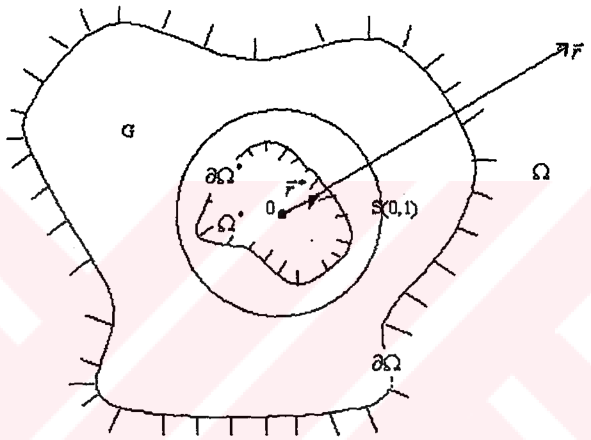
olacak şekilde sınırlı bir bölge ise Ω, G ye dış bölge olarak adlandırılır. Burada $\partial\Omega = \partial G$ ve $\Omega \cup G \cup \partial G = \mathbb{R}^n$ dir.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı G bölgesinin dış bölgesi ve f, $C^0\,(\partial\Omega)$ da verilen bir fonksiyon olsun. $u \in C^2\,(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ fonksiyonu

$$\Delta u(\vec{r}) = 0 \ , \ \vec{r} \in \Omega \tag{3.4.3}$$

$$u(\vec{r}) = f(\vec{r}), \ \vec{r} \in \partial\Omega \tag{3.4.4}$$

denklemlerini sağlasın. Öteleme ve benzerlik dönüşümleri harmonikliği koruduğundan genellikten bir şey kaybetmeksizin kapalı $\bar{B}\ (0,1)$ birim yuvarının $\bar{G}$ da bulunduğunu kabul edelim. Ω^*, Ω nın $S\ (0,1)$ e göre inversiyonundan elde edilen noktaların kümesiyle orijinden meydana gelsin. Ω^*, $\bar{B}\ (0,1)$ da bulunan sınırlı bir bölgedir.



Şekil 3.4.1.

Orijin hariç her $\vec{r}^{\,*} \in \Omega^*$ noktası

$$r\ \vec{r}^{\,*} = r^*\ \vec{r}\ , \qquad rr^* = 1 \tag{3.4.5}$$

inversiyon formülü ile bir tek $\vec{r} \in \Omega$ noktasına karşılık gelir. $\vec{r}^{\,*} = 0$ orijini sonsuza karşılık gelir. Bu noktadan sonra incelemeye $n = 3$ için devam edelim ve

$$u^*(\vec{r}^{\,*}) = \frac{1}{r^*} u(\vec{r})\ , \qquad \vec{r}^{\,*} \in \Omega^* \quad , \qquad \vec{r}^{\,*} \neq 0 \tag{3.4.6}$$

$$f^*(\vec{r}^{\,*}) = \frac{1}{r^*} f(\vec{r})\ , \qquad \vec{r}^{\,*} \in \partial\Omega^* \tag{3.4.7}$$

olsun. u^* fonksiyonu orijin hariç Ω^* da tanımlı ve harmonik; f^*, $\partial\Omega^*$ üzerinde tanımlı ve süreklidir. u^* fonksiyonu $\partial\Omega^*$ üzerinde f^* değerini alsın. u^*, orijini içeren tüm Ω^* da tanımlı ve sürekli olsaydı Ω^* da tanımlanan Dirichlet probleminin çözümü olabilirdi. Aşağıdaki teorem u nun sonsuzda (∞) kesin koşulu sağlaması şartıyla tüm Ω^* da harmonik olan orijinde bir fonksiyon tanımlamaya muktedir kılacaktır.

Teorem 3.4.1. $v(\vec{r})$, orijin hariç $\mathbb{R}^n$ de orijinin bir Ω_0 komşuğunda tanımlı ve harmonik olsun. Bu durumda, orijini içeren Ω_0 da harmonik olacak şekilde $v(\vec{r})$, orijinde

$$\left.\begin{array}{l} v(\vec{r}) \ , \quad \vec{r}\in \Omega_0 - \{0\} \quad \text{için sınırlı} \ ; \ n = 2 \\ r^{n-2}\left|v(\vec{r})\right| \leq \mu(\vec{r}) \ , \ \vec{r}\in \Omega_0 - \{0\} \ ; \ n \geq 3 \end{array}\right\} \tag{3.4.8}$$

$$\vec{r}\to 0 \ \text{ için } \ \mu(\vec{r}) \to 0$$

koşulunun sağlanacağı biçimde tanımlanabilir.

Bu teorem, harmonik fonksiyonların hareketli singülerlikleri üzerinedir (Petrovsky 1957).

$n = 3$ için (3.4.6) dan

$$r^*\left|u^*(\vec{r}^{\,*})\right| = \left|u(\vec{r})\right|$$

olduğu görülmektedir. $r^* \to \infty$ iken $r \to \infty$ olduğundan Teorem 3.4.1. den yararlanarak u^* fonksiyonu Ω^* da harmonik olmak üzere $u^*(\vec{r}^{\,*})$, $\vec{r}^{\,*} = 0$ da

$$\mu(\vec{r}) \to 0 \ , \quad \vec{r}\to \infty \ \text{ için} \tag{3.4.9}$$

şartıyla tanımlanabilir. Bunun anlamı, verilen $\varepsilon > 0$ ve her $\vec{r}\in\Omega$ için $\left|u(\vec{r})\right| < \varepsilon$ olmak üzere $\left|\vec{r}\right| > R$ şartını sağlayan $R > 0$ vardır.

$n = 2$ için sonsuzdaki koşul u yu sınırlı bırakırken yani,

$$\left|u(\vec{r})\right| \leq M \ , \ \vec{r}\in\Omega \tag{3.4.10}$$

olacak şekilde $M > 0$ sabiti bulunabilirken; aynı şekilde $n > 3$ için sonsuzdaki koşul ise (3.4.9) durumudur.

Sonsuzdaki koşul $n \geq 3$ için (3.4.9) ve $n = 2$ için (3.4.10) olmak üzere (3.4.3) ve (3.4.4) ile tanımlanan dış Dirichlet problemi, küreye göre inversiyonla sınırlı bir bölgedeki Dirichlet problemine dönüştü. Sınırlı bölgeler için bildiğimiz varlık ve teklik teoremleri, sınır değerlerine sürekli bağımlılık gibi sonuçlar burada da verilebilir. Örneğin teklik teoremini verelim.

Teorem 3.4.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir dış bölge ve $f \in C^0(\partial\Omega)$ olsun. Sonsuzdaki koşulu $n \geq 3$ için (3.4.9) ve $n = 2$ için (3.4.10) olan (3.4.3) ve (3.4.4) denklemlerini sağlayan bir $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ fonksiyonu vardır.

Örnek 3.4.1. $n = 2$ ise (3.4.1) ve (3.4.2) denklemlerinin sınırlı olan tek çözümü $u(\vec{r}) = 1$ dir. $n = 3$ ise (3.4.1) ve (3.4.2) nin $\vec{r} \to \infty$ iken 0 a yaklaşan tek çözümü $u(\vec{r}) = \dfrac{1}{r}$ fonksiyonudur.

Örnek 3.4.2. Ω, $\mathbb{R}^2$ deki $B(0,1)$ birim dairesinin dış bölgesi olsun. $f \in C^0(\partial\Omega)$ ve f' parçalı sürekli olmak üzere

$$\Delta u(r,\theta) = 0 \ , \ r > 1 \ , \ -\pi \leq \theta \leq \pi \qquad (3.4.11)$$

$$u(1,\theta) = f(\theta) \quad , \ -\pi \leq \theta \leq \pi \qquad (3.4.12)$$

$$u(r,\theta) \ , \ \ \Omega \text{ da sınırlı} \qquad (3.4.13)$$

şeklinde verilen dış Dirichlet problemini dikkate alalım. $S(0,1)$ e göre inversiyonla elde edilen $u^*(r^*,\theta)$, Kısım 2.7. de çözülen birim dairedeki iç Dirichlet problemini sağlar. r yerine r^* alarak $u^*(r^*,\theta)$ çözümü (2.7.9) serisi veya (2.7.16) Poisson integrali ile verilir. $r^* = \dfrac{1}{r}$ ve $u^*(r^*,\theta) = u(r,\theta)$ olduğundan yukarıdaki dış Dirichlet probleminin çözümü;
$n = 0, 1, \ldots$ için a_n ve b_n, f nin Fourier katsayıları olmak üzere

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}\left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right) \ , \quad r \geq 1 \qquad (3.4.14)$$

serisi ile ya da

$$u(r,\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)\, f(\phi)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\phi)}\, d\phi\,, \quad r \geq 1 \tag{3.4.15}$$

Poisson integrali ile verilir.

Bir küreye göre inversiyon metodu dış bölgelerin yanında, bölgenin tümleyeninin bir küre içermesi şartıyla sınırsız bölgelere de uygulanabilir. Dış bölgelerin sınırları sonsuza genişleyebileceğinden sınırların ve sonsuza yaklaşırken Dirichlet verisinin davranışı dikkatlice incelenmeli ve iyi kurulmuş problemleri formülüze ederken dikkate alınmalıdır.

3.5. Elektrostatik Görüntü Metoduyla Green Fonksiyonunun Belirlenmesi

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ bölgesinde Dirichlet problemi için Green fonksiyonu

$$G(\vec{r}', \vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|} + h(\vec{r}', \vec{r}); \quad \vec{r}', \vec{r} \in \bar{\Omega}\ , \quad \vec{r}' \neq \vec{r} \tag{3.5.1}$$

şeklide idi. $\vec{r}'$ nün bir fonksiyonu olan $h(\vec{r}', \vec{r})$ her $\vec{r} \in \Omega$ için Ω da harmoniktir ve

$$h(\vec{r}', \vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|}\ , \quad \vec{r}' \in \partial\Omega \tag{3.5.2}$$

sınır koşulunu sağlar. Bu nedenle; $\vec{r}'$ nün bir fonksiyonu olan $G(\vec{r}', \vec{r})$, Ω da $\vec{r}' = \vec{r}$ kutuplu harmoniktir ve $\partial\Omega$ sınırında yokolur. Ayrıca, $\vec{r}'$ ile $\vec{r}$ arasındaki uzaklığın inversi gibi $\vec{r}' \to \vec{r}$ iken $G(\vec{r}', \vec{r}) \to \infty$ dur. Önceki kısımda

$$\Delta u = 0\,, \ \ \Omega \text{ da } \ ; \quad u = f\ , \ \ \partial\Omega \text{ üzerinde} \tag{3.5.3}$$

Dirichlet probleminin çözümü; $\frac{\partial}{\partial n}$, $\partial\Omega$ ya dış normal doğrultudaki türevi göstermek üzere $G(\vec{r}', \vec{r})$ Green fonksiyonu yardımıyla

$$u(\vec{r}) = -\int_{\partial\Omega} f(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial n} G(\vec{r}', \vec{r})\, d\sigma\ , \quad \vec{r} \in \Omega \tag{3.5.4}$$

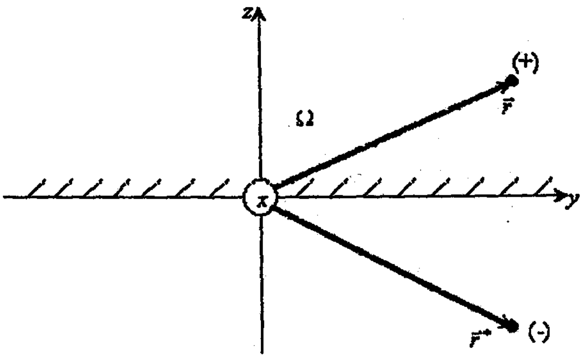
olarak elde edilmişti. Bu nedenle (3.5.3) Dirichlet probleminin çözümü, $G(\vec{r}', \vec{r})$ Green fonksiyonunun bilinmesine indirgenir. Ω sınırsız bir bölge olsa bile uygun koşullar altında (3.5.4) formülü problemin çözümünü verir.

Eğer Ω bölgesinin $\partial\Omega$ sınırı topraklanmış iletken bir yüzey ise $G(\vec{r}', \vec{r})$ yi Ω bölgesinin $\vec{r}$ noktasına yerleştirilen birim yükten kaynaklanan elektrostatik potansiyel olarak yorumlamak, $G(\vec{r}', \vec{r})$ Green fonksiyonunu belirlemede kullanışlı bir metoddur (Topraklanmış yüzeyde potansiyel sıfırdır). $G(\vec{r}', \vec{r})$ nin (3.5.1) formülündeki ilk terim, $\vec{r}$ noktasındaki birim yükten kaynaklanan potansiyeli gösterir. Bu birim yük, $\partial\Omega$ iletken yüzeyinde yük dağılımını indükler (yük dağılımına sebep olur). (3.5.1) formülündeki $h(\vec{r}', \vec{r})$ terimi ise $\partial\Omega$ daki indüklenmiş yük dağılımından kaynaklanan potansiyeli gösterir. Bu nedenle, $h(\vec{r}', \vec{r})$ nin belirlenmesi, kendi içinde zor bir problem olan $\partial\Omega$ daki indüklenmiş yük dağılımının bulunmasına bağlıdır. *Elektrostatik görüntü metodu,* bu zorluğu giderir. $h(\vec{r}', \vec{r})$ yi $\partial\Omega$ üzerindeki yük dağılımından kaynaklanan potansiyel olarak almak yerine Ω nın tümleyenine yerleştirilen sanal yüklerden kaynaklanan potansiyel olarak dikkate alabiliriz. Bu sanal yükler, $\vec{r} \in \Omega$ noktasındaki birim yükün elektrostatik görüntüsü olarak adlandırılır. Öyle ki $h(\vec{r}', \vec{r})$ potansiyeli, bu yüklerin (3.5.2) koşulunu sağlamasından kaynaklanır. Başka bir deyişle, Ω bölgesinin $\partial\Omega$ sınırındaki her noktada elektrostatik görüntüden ileri gelen potansiyel $\vec{r}$ noktasındaki birim yükten kaynaklanan potansiyelin negatifine eşit olmalıdır. $\partial\Omega$ sınırı topraklanmış iletken bir yüzey olarak dikkate alınırsa $G(\vec{r}', \vec{r})$ toplam potansiyeli $\partial\Omega$ da "0" a eşit olmalıdır. Çoğu problemde $\partial\Omega$ nın geometrisi o kadar basittir ki elektrostatik görüntünün seçimi aşikardır.

Örnek 3.5.1. Ω, $\mathbb{R}^3$ de

$$\Omega = \{(x, y, z) : \ z > 0\}$$

üst yarı uzayı olsun. $\vec{r} = (x, y, z) \in \Omega$ noktasındaki birim yükü dikkate alalım. $\vec{r}^* = (x, y, -z)$ noktasında bir negatif birim yük tanıtılırsa Ω nın $z = 0$ sınırı üzerinde, bu iki yükten kaynaklanan potansiyel "0" a eşit olacaktır. Böylece $\vec{r}$ deki birim yükün elektrostatik görüntüsü, $\vec{r}$ nin Ω nın sınırına göre yansıması olan $\vec{r}^*$ noktasındaki negatif birim yüktür.



Şekil 3.5.1.

Sonuç olarak Green fonksiyonu

$$G(\vec{r}',\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\left|\vec{r}'-\vec{r}\right|} - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\left|\vec{r}'-\vec{r}^*\right|} \tag{3.5.5}$$

şeklindedir. Gerçekten; $\vec{r}'$, $\partial\Omega$ üzerinde olduğunda

$$\left|\vec{r}'-\vec{r}\right| = \left|\vec{r}'-\vec{r}^*\right|$$

olup

$$G(\vec{r}',\vec{r}) = 0$$

dır. Kartezyen koordinatlar cinsinden

$$\begin{aligned} G(\vec{r}',\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{1/2}} \\ &\quad -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'+z)^2]^{1/2}} \end{aligned}$$

şeklindedir. (3.5.3) Dirichlet probleminin çözümü olan (3.5.4) formülü bu problemde

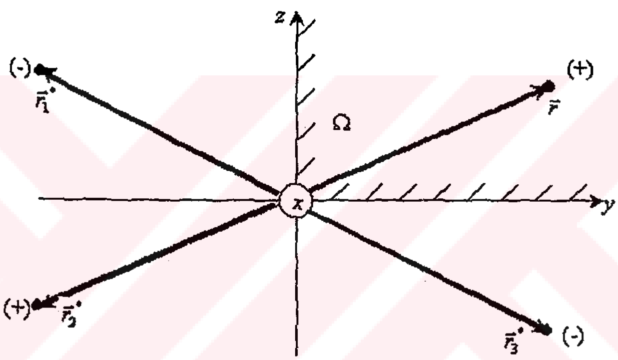
$$u(x,y,z) = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x',y')\,dx'dy'}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + z^2]^{3/2}} \tag{3.5.6}$$

şeklindedir.

Örnek 3.5.2. Ω, $\mathbb{R}^3$ de

$$\Omega = \{(x,y,z) : y > 0 \ , \quad z > 0\}$$

çeyrek uzayı olsun. $\vec{r} = (x,y,z) \in \Omega$ noktasındaki birim yükü dikkate alalım.



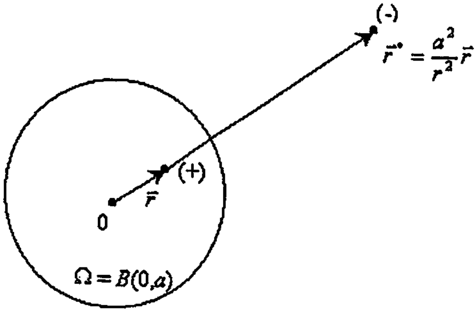
Şekil 3.5.2.

Bu olaydaki elektrostatik görüntüler; $\vec{r}_1^* = (x,-y,z)$ noktasındaki negatif birim yük, $\vec{r}_2^* = (x,-y,-z)$ noktasındaki pozitif birim yük ve $\vec{r}_3^* = (x,y,-z)$ noktasındaki negatif birim yük şeklindedir. Bu dört yükten kaynaklanan potansiyel Ω nın sınırında yokolur ve Ω da verilen Dirichlet problemi için aranılan Green fonksiyonu

$$G(\vec{r}', \vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}_1^*\right|} + \frac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}_2^*\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r}' - \vec{r}_3^*\right|} \right] \tag{3.5.7}$$

şeklindedir.

Örnek 3.5.3. Ω, $B(0,a)$ küresi olsun. $\vec{r} \in \Omega$ noktasındaki birim yükü dikkate alalım.



Şekil 3.5.3.

Geometrik argümanları kullanarak elektrostatik görüntünün $\vec{r}^{*} = \frac{a^2}{r^2}\,\vec{r}$ noktasına yerleştirilmesi gerektiği ve $\frac{a}{r}$ büyüklüğünde olması gerektiği görülür ($\vec{r}^{*}$ noktası, $S(0,a)$ küresine göre $\vec{r}$ nin inversidir). Green fonksiyonu ise

$$G(\vec{r}\,',\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\left|\vec{r}\,' - \vec{r}\right|} - \frac{1}{4\pi}\frac{a/r}{\left|\vec{r}\,' - \vec{r}^{*}\right|} \tag{3.5.8}$$

olup $\vec{r}\,' \in \partial\Omega = S(0,a)$ için $G(\vec{r}\,',\vec{r}) = 0$ dır. Bazı işlemlerden sonra Green fonksiyonu

$$G(\vec{r}\,',\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\left|\vec{r}\,' - \vec{r}\right|} - \frac{1}{\left|\frac{a}{r'}\vec{r}\,' - \frac{r'}{a}\vec{r}\right|}\right] \tag{3.5.9}$$

şeklinde yazılabilir.

Elektrostatik kavramı, $n > 3$ için $\mathbb{R}^n$ de gerçek bir anlam taşımasa bile bu bölgelerde de kullanılabilir. $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ noktasında birim yükten kaynaklanan potansiyel

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\left|\vec{r}\,' - \vec{r}\right|}\,, \quad n = 2 \text{ için} \;;\quad \frac{1}{S_n}\frac{1}{\left|\vec{r}\,' - \vec{r}\right|^{n-2}}\,, \quad n \geq 3 \text{ için} \tag{3.5.10}$$

şeklinde olup buradaki S_n, $\mathbb{R}^n$ deki birim yuvarın yüzey alanıdır.

3.6. Kompleks Değişkenli Analitik Fonksiyonlar ve İki Boyutlu Laplace Denklemi

Kompleks değişkenli analitik fonksiyonlarla iki boyutlu Laplace sınır değer probleminin çözümünde ortaya çıkan iki reel değişkenli harmonik fonksiyonlar arasında önemli bağıntılar vardır. Bu kısmın iyi anlaşılması için kompleks analizden bazı temel sonuçlar ve basit bir örnekle konform (conformal) eşleme metodu verilecektir.

$z = x + iy$ olsun. Kabul edelim ki,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{3.6.1}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de z nin analitik bir fonksiyonudur. Bu durumda

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) \quad , \quad u(x, y) = \operatorname{Im} f(z) \tag{3.6.2}$$

fonksiyonları x ve y reel değişkenlerinin reel değerli analitik fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar $f(z)$ nin sırasıyla reel ve imajiner kısımları olarak bilinir. $f(z)$ nin analitikliği için gerekli bir koşul, u ve v nin

$$u_x = v_y \ , \ \ u_y = -v_x \ \ ; \ (x, y) \in \Omega \tag{3.6.3}$$

Cauchy-Riemann denklemlerini sağlamasıdır. Eğer u ve v fonksiyonları Cauchy-Riemann denklemlerini sağlıyorsa, Ω da Laplace denklemini sağlar. Yani,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ , \ \ v_{xx} + v_{yy} = 0 \ ; \ (x, y) \in \Omega \tag{3.6.4}$$

dır. Bu nedenle analitik bir fonksiyonun reel ve imajiner kısımları harmonik fonksiyonlardır. Örneğin,

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

fonksiyonu tüm z-düzleminde z kompleks değişkeninin analitik bir fonksiyonudur.

Bu fonksiyonun reel ve imajiner kısımları olan

$$u(x,y) = e^x \cos y \quad , \quad v(x,y) = e^x \sin y$$

fonksiyonları ise $\mathbb{R}^2$ de x ve y reel değişkenlerinin harmonik fonksiyonlarıdır.

Kompleks değişkenli bir analitik fonksiyonun reel ve imajiner kısımları olan $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ harmonik fonksiyonlarına *harmonik eşlenik* denir. Basit bağlantılı Ω bölgesinde verilen $u(x,y)$ harmonik fonksiyonunun Ω daki harmonik eşleniği bir integrasyon sabiti farkıyla belirlenir.

Harmonik fonksiyonların zengin kaynakları yanında kompleks değişkenli analitik fonksiyonlar, aşağıda belirtilen önemli özellikten dolayı iki boyutlu Laplace denklemi çalışmasında önemli bir rol oynar:
Kompleks değişkenli analitik fonksiyonlarla tanımlanan değişken dönüşümü altında harmonik fonksiyonlar harmonikliğini korur.
Birbirinin tersi olan $w = f(z)$ ve $z = F(w)$ fonksiyonları analitik olsun. Bu durumda $\frac{dw}{dz} = f'(z)$ ve $\frac{dz}{dw} = F'(w)$ türevleri sıfırdan farklı ve $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}}$ dir. Ayrıca $z = x + iy$, $w = u + iv$ olmak üzere $u(x,y)$, $v(x,y)$; $x(u,v)$, $y(u,v)$ ler sırasıyla $f(z)$ ve $F(w)$ nin reel ve imajiner kısımları iseler

$$\left.\begin{array}{l} u = u(x,y) \quad , \quad v = v(x,y) \quad ; \\ x = x(u,v) \quad , \quad y = y(u,v) \end{array}\right\} \tag{3.6.5}$$

bağıntıları koordinatların singüler olmayan bir dönüşümünü tanımlar. Kabul edelim ki $U(x,y)$, x ve y değişkenlerinin $C^2(\Omega)$ deki bir fonksiyonu olsun. Bu durumda zincir kuralını ve Cauchy-Riemann denklemlerini kullanarak

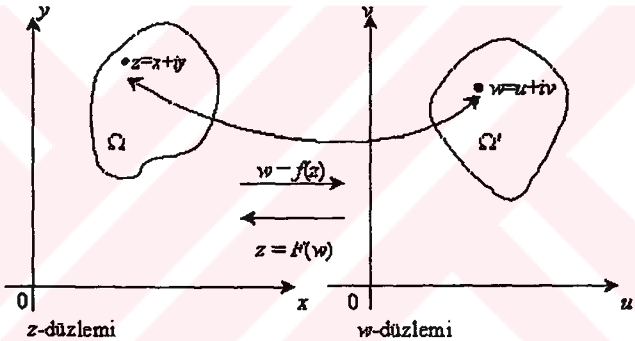
$$U_{xx} + U_{yy} = (U_{uu} + U_{vv}) \left| f'(z) \right|^2 \tag{3.6.6}$$

olduğu görülür. x ve y nin $U(x,y)$ fonksiyonu harmonik ise u ve v nin fonksiyonu olan $U(u,v) = U(x(u,v), y(u,v))$ dönüşmüş fonksiyonu da harmonik olacaktır.

Harmonik fonksiyonların yukarıdaki dönüşüm özelliği pratikte çok kullanışlıdır. Örneğin xy-düzlemindeki bir Ω bölgesinde verilen

$$\Delta U = 0 \ , \quad \Omega \text{ da} \quad ; \quad U = \phi \ , \quad \partial\Omega \text{ üzerinde}$$

Dirichlet problemini dikkate alalım. Kabul edelim ki; $w = f(z)$ fonksiyonu z-düzlemindeki Ω bölgesinde tanımlı ve harmonik, Ω bölgesini w düzlemindeki Ω' bölgesine eşlesin. Ayrıca Ω' de tanımlı ve analitik olan, Ω' nü Ω bölgesine eşleyen bir $z = F(w)$ tersine sahip olsun. Ω da kesişen herhangi iki eğri arasındaki açı korunduğundan, $w = f(z)$ fonksiyonuyla Ω bölgesininin Ω' bölgesine eşlenmesine konform (conformal) eşleme denir (Ω' deki görüntü eğriler de aynı açı ile kesişir).



Şekil 3.6.1.

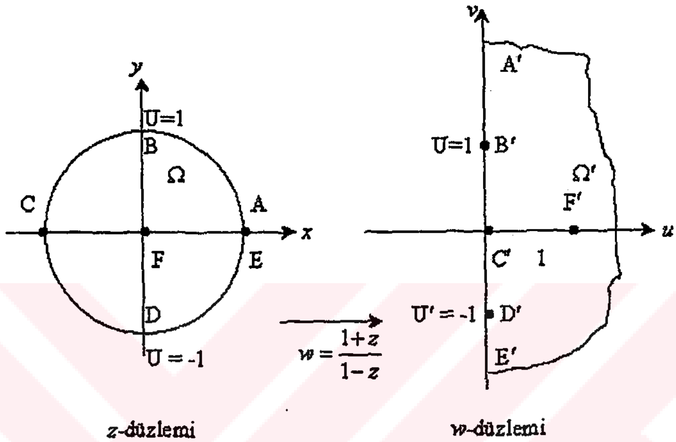
Böyle bir konform eşleme altında Ω bölgesinde $U(x, y)$ için verilen Dirichlet problemi, Ω' de $U(u, v)$ dönüşmüş fonksiyonu için Dirichlet problemine dönüşür. Bu son problem çözüldüğü takdirde z-düzlemine geri dönülerek orijinal Dirichlet probleminin çözümü elde edilir.

Örnek 3.6.1. Birim dairede verilen

$$\begin{aligned} \Delta U(r, \theta) &= 0 \ , \ 0 \leq r < 1 \ , \ -\pi \leq \theta \leq \pi \\ U(1, \theta) &= \begin{cases} 1 \ , & 0 < \theta \leq \pi \\ -1 \ , & -\pi < \theta \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dirichlet probleminin çözümünü bulunuz.

Problem, şekildeki z-düzleminde belirtilmiştir.



Şekil 3.6.2.

$$w = \frac{1+z}{1-z} \tag{3.6.7}$$

fonksiyonu $\Omega = \{z : |z| < 1\}$ dairesel bölgesinde analitik ve Ω yı $w-$düzlemindeki $\Omega' = \{w : u = \mathrm{Re}\, w > 0\}$ yarı düzlemine ve Ω nın sınırını da şekilde gösterildiği haliyle Ω' nün sınırına eşler. $w-$düzlemindeki dönüşmüş problem,

$$\begin{aligned} \Delta U(u,v) &= 0 \ , \ 0 < u < \infty \ , \ \ -\infty < v < \infty \\ U(0,v) &= \begin{cases} 1 \ , & 0 < v < \infty \\ -1 \ , & -\infty < v < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu problemin sınırlı çözümü (2.2.21) den

$$U(u,v) = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{v}{u}\right) \tag{3.6.8}$$

şeklindedir. Orijinal problemin çözümü için z-düzlemine dönülmelidir. u ve v, x ve

y değişkenleri ile değiştirilmelidir. (3.6.7) den kolaylıkla

$$u = \frac{1 - x^2 - y^2}{(1-x)^2 + y^2} \qquad v = \frac{2y}{(1-x)^2 + y^2}$$

bulunur. Bu nedenle verilen (orijinal) Dirichlet probleminin çözümü

$$U(x,y) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{2y}{1 - x^2 - y^2}\right) \tag{3.6.9}$$

dir.

Bu metodun uygulanabilirliği, konform eşleme ile elde edilen dönüşmüş bölgeler hakkındaki bilgimize dayanır. $\Omega \neq \mathbb{R}^2$ olmak üzere parçalı düzgün sınırlı, iki boyutlu basit bağlantılı herhangi bir Ω bölgesinde verilen Dirichlet probleminin çözümünde konform eşleme metodu kullanılabilir. Riemann ın meşhur eşleme teoremi, böyle bir bölgeyi konform eşleme ile açık birim daireye, bölgenin sınırını da dairenin çevresine eşlemeyi ifade eder. Bu nedenle Ω bölgesinde verilen Dirichlet problemi, birim diskte verilen Dirichlet problemine dönüşür. Bu problemin çözümü ise Poisson integrali ile verilir.

3.7. Neumann Problemi

Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırı $\partial\Omega$ olan düzgün sınırlı bir bölge; $\vec{n}=\vec{n}\,(x)$, $x \in \partial\Omega$ noktasındaki dış birim normal vektör ve f fonksiyonu $\partial\Omega$ üzerinde tanımlı ve sürekli olsun. Neumann problemi, Ω da Laplace denklemini sağlayan ve $\partial\Omega$ üzerindeki dış normal türevi f ye eşit olan $u \in C^0(\bar{\Omega})$ fonksiyonunun bulunmasıdır. Bu problem aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$\nabla^2 u = 0 \quad , \quad \Omega \text{ da} \tag{3.7.1}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = f(x) \quad , \quad x \in \partial\Omega \tag{3.7.2}$$

denklemlerini sağlayan u fonksiyonunu bulalım. Durumun elemanter düzeyde tutulabilmesi için $\partial\Omega$ ve f ye nisbeten ağır koşullar yüklenmiştir. Aşağıdaki iki teoremin ispatını daha kolay yapabilmek için ek olarak kabul edelim ki, $u \in C^1(\bar{\Omega})$ olsun.

Eğer u, (3.7.1) ve (3.7.2) ile tanımlanan Neumann probleminin bir çözümü ise c herhangi bir sabit olmak üzere $u+c$ de Neumann probleminin bir çözümüdür. Aşağıdaki teorem göstermektedir ki, Neumann problemin çözümü bir toplama sabiti ile tekdir.

Teorem 3.7.1. Neumann probleminin herhangi iki çözümü bir toplama sabitiyle birbirinden farklıdır.

İspat: $f(x) = 0$ olmak üzere (3.7.1) ve (3.7.2) ile tanımlanan Neumann probleminin herhangi iki çözümü u_1 ve u_2 olsun. Bu iki çözümün farkı olan $\bar{u}= u_1 - u_2$, (3.7.1) ve (3.7.2) yi sağlamalıdır. Birinci Green özdeşliğinde $u = w = \bar{u}$ alınırsa

$$\int_\Omega |\nabla \bar{u}|^2 \, dx = 0$$

elde edilir. Buradan $\bar{u}$ nün Ω içinde bir sabit olması gerektiği açıktır. f verisi

$$\int_{\partial\Omega} f(x) \, d\sigma = 0 \tag{3.7.3}$$

koşulunu sağlarsa (3.7.1) ve (3.7.2) ile tanımlanan Neumann probleminin bir çözüme sahip olduğu ispatlanabilir.

Teorem 3.7.2. (3.7.1) ve (3.7.2) ile tanımlanan Neumann probleminin çözümünün varlığı için (3.7.3) koşulu gereklidir.

İspat: Eğer u, Neumann probleminin bir çözümü ise Divergens teoremini kullanarak

$$0 = \int_\Omega \nabla^2 u \, dx = \int_\Omega \nabla.\nabla u \, dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u.\vec{n} \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \int_{\partial\Omega} f(x) \, d\sigma$$

bulunur.

$\partial\Omega$ üzerinde verilen $f(x)$ ısı akışının Ω bölgesinde herhangi bir noktadaki sabit sıcaklığı olan u fonksiyonunun fiziksel anlamı, $\partial\Omega$ ya toplam ısı akışının "0" olmasını gerektiren (3.7.3) koşulunun gerekliliğini açıklar. Eğer bu olmasaydı, Ω bölgesindeki ısı enerjisinde net bir değişiklik olacaktı. Böyle bir değişiklik ise sabit hal koşulları altında mümkün değildir.

Örnek 3.7.1. $\mathbb{R}^2$ de birim dairede verilen

$$\Delta u = 0 \ , \ 0 \leq r < 1 \ , \ -\pi \leq \theta \leq \pi \tag{3.7.4}$$

$$\frac{\partial u(1,\theta)}{\partial r} = f(\theta) \ , \ -\pi \leq \theta \leq \pi \tag{3.7.5}$$

Neumann probleminin çözümünü bulunuz.

Bir çözümün varlığı için gerekli olan (3.7.3) koşulu bu problemde,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta = 0 \tag{3.7.6}$$

dır. Problem, birim daire için verilen Dirichlet probleminin çözüm metoduyla çözülebilir. Harmonik fonksiyonların

$$u(r,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \tag{3.7.7}$$

formundaki lineer kombinasyonu şeklinde bir çözüm aranmaktadır. Eğer

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (nA_n \cos n\theta + nB_n \sin n\theta) \ , \ -\pi \leq \theta \leq \pi \tag{3.7.8}$$

şeklinde ise (3.7.5) sınır koşulu sağlanacaktır. f nin sürekli ve dairenin sınırında parçalı sürekli olduğunu kabul edilirse, f

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \ , \ -\pi \leq \theta \leq \pi$$

şeklinde bir Fourier serisi ile gösterilebilir. Ayrıca f nin (3.7.3) koşulunu sağlaması gerektiğinden $\frac{a_0}{2}$ terimi "0" olacaktır. Eğer

$$A_n = \frac{a_n}{n} = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta \quad ; \quad n = 1, 2, ... \tag{3.7.9}$$

$$B_n = \frac{b_n}{n} = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta \quad ; \quad n = 1, 2, ... \tag{3.7.10}$$

şeklinde ise (3.7.8) sağlanacaktır. Bu durumda, A_0 keyfi olmak üzere verilen Neumann probleminin çözümü

$$u(r,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\right)$$

şeklindedir. Teorem 3.7.1. e göre bu çözüm sabit farkıyla tektir.

Bir çembere göre inversiyon metodu kullanılarak Teorem 3.7.1. ve 3.7.2. nin, Ω nın tümleyininin bir daire içermesi ve u yu sınırlı bırakan sonsuzdaki bir koşulu sağlaması şartıyla bir Ω dış bölgesindeki Neumann problemi için geçerli olduğu görülür. Ω basit bağlantılı bir bölge ise bu bölgede tanımlanan Neumann problemi, (3.7.3) ün sağlanması koşuluyla aynı bölgede tanımlanan bir Dirichlet problemine dönüşebilir. Dönüşüm metodunda harmonik eşlenik fonksiyonların özellikleri kullanılır.

4. POLİHARMONİK FONKSİYONLAR

4.1. Poliharmonik Fonksiyonlar

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) u = 0 \tag{4.1.1}$$

Laplace denklemini sağlayan herhangi bir $u \in C^2(\Omega)$ fonksiyonu, Ω da harmonik fonksiyon olarak tanımlanmıştı.

Tanım 4.1.1. $p \geq 2$ olan bir tamsayı olmak üzere

$$\Delta^p u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^p u = 0 \tag{4.1.2}$$

denklemine *poliharmonik denklem*, bu denklemi sağlayan $u \in C^{2p}$ şeklindeki fonksiyonlara da *poliharmonik fonksiyon* denir.

$p = 2$ özel hali biharmonik olarak bilinir. Ayrıca, Δ Laplace operatörünün (4.1.2) deki kuvvetleri

$$\Delta^p u = \Delta(\Delta^{p-1} u) \quad ; \quad p = 1, 2, ... \tag{4.1.3}$$

şeklinde tanımlanır.

4.2. Laplace Operatörünün Bazı Özellikleri

Teorem 4.2.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de $u, v \in C^2(\Omega)$ olsun. O takdirde

$$\Delta(uv) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(uv) = v\Delta(u) + u\Delta(v) + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \tag{4.2.1}$$

dir.

İspat: $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(uv) = v\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + u\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ ve

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(uv) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(uv)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(uv) &= \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \\
&= v\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan

$$\begin{aligned}
\Delta(uv) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(uv) = \sum_{i=1}^{n}\left[v\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right] \\
&= v\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + u\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \\
&= v\Delta(u) + u\Delta(v) + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.2.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de $u \in C^2(\Omega)$ harmonik bir fonksiyon ve $r = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ olsun. O takdirde m herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$\Delta(r^m u) = m(m+n-2)r^{m-2}u + 2mr^{m-2}\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{4.2.2}$$

dir.

İspat: Teorem 4.2.1. ile verilen

$$\Delta(uv) = v\Delta(u) + u\Delta(v) + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

ifadesinde v yerine r^m konulursa

$$\Delta(r^m u) = r^m\Delta(u) + u\Delta(r^m) + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial r^m}{\partial x_i} \tag{4.2.3}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\frac{\partial r^m}{\partial x_i} = mr^{m-1}\frac{\partial r}{\partial x_i} = mr^{m-1}\frac{x_i}{r} = mx_i r^{m-2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 r^m}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial r^m}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(m x_i r^{m-2}\right)\\ &= m r^{m-2} + m(m-2)x_i r^{m-3}\frac{\partial r}{\partial x_i}\\ &= m r^{m-2} + m(m-2)x_i^2 r^{m-4}\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}\Delta(r^m) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 r^m}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\left[m r^{m-2} + m(m-2)x_i^2 r^{m-4}\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n} m r^{m-2} + m(m-2)r^{m-4}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\\ &= mnr^{m-2} + m(m-2)r^{m-4}r^2\\ &= mnr^{m-2} + m(m-2)r^{m-2}\\ &= m(m+n-2)r^{m-2}\end{aligned}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial r^m}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} m x_i r^{m-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} = m r^{m-2}\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

şeklinde bulunur. u harmonik fonksiyonu için $\Delta u = 0$ olduğu dikkate alınarak yukarıda elde edilen sonuçlar (4.2.3) de yerine yazılırsa

$$\Delta(r^m u) = m(m+n-2)r^{m-2}u + 2mr^{m-2}\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

bulunur ki bu, ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de $u_\lambda \in C^2(\Omega)$, λ-yıncı dereceden homogen harmonik bir fonksiyon ve $r = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ olsun. Bu durumda, m herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$\Delta(r^m u_\lambda) = m(m+n+2\lambda-2)r^{m-2}u_\lambda \tag{4.2.4}$$

dir.

İspat: λ-yıncı dereceden homogen u_λ harmonik fonksiyonu, Euler teoreminden dolayı

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} = \lambda u_\lambda \tag{4.2.5}$$

eşitliğini gerçekler. Bu sonuç (4.2.2) de kullanılırsa

$$\begin{aligned}\Delta(r^m u_\lambda) &= m(m+n-2)r^{m-2}u_\lambda + 2mr^{m-2}\lambda u_\lambda \\ &= m(m+n+2\lambda-2)r^{m-2}u_\lambda\end{aligned}$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.4. Δ Laplace operatörü ve

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = T \tag{4.2.6}$$

olmak üzere

$$\Delta T = (2+T)\,\Delta \tag{4.2.7}$$

dir.

İspat: Teoremin ispatını önce $n=3$ için yapalım. Bu durumda

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{ve} \qquad T = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

alınabilir. T operatörüne Δ Laplace operatörü uygulandığında

$$\begin{aligned}\Delta T &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta T &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+z\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}+y\frac{\partial^2}{\partial y^2}+z\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\right)\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+y\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}+z\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x\frac{\partial^3}{\partial x^3}+y\frac{\partial 3}{\partial x^2\partial y}+z\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial z}\right)+\left(x\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right.\\
&\quad\left.+y\frac{\partial^3}{\partial y^3}+z\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial z}\right)+\left(x\frac{\partial^3}{\partial x\partial z^2}+y\frac{\partial^3}{\partial y\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+z\frac{\partial^3}{\partial z^3}\right)\\
&= 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\\
&\quad+z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\\
&= \left(2+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\\
&= (2+T)\,\Delta
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu ise $n=3$ için ispatı tamamlar.

Şimdi de ispatı n için yapalım. $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ de $u\in C^3(\Omega)$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
(\Delta T)u &= \Delta(Tu)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(x_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right)+\frac{\partial u}{\partial x_i}+x_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2\partial x_j}\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[2\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\sum_{j=1}^{n}\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(2+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\\
&= \left(2+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)=(2+T)\Delta u
\end{aligned}
$$

yazılabilir ki, buradan

$$\Delta T=(2+T)\,\Delta$$

sonucu elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.5. m herhangi bir reel sayı, $p \geq 2$ olan bir tamsayı ve

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = T$$

olsunlar. Bu takdirde

$$m - 2j + n - 2 + 2T = T_j \quad ; \quad j = 0, 1, ..., p-1 \tag{4.2.8}$$

olarak tanımlanan T_j $(\, j = 0, 1, ..., p-1)$ operatörleri çarpıma göre değişme özelliğine sahiptir.

İspat: $k \neq l$ olmak üzere $j = k$ ve $j = l$ için karşılık gelen operatörler sırasıyla

$$T_k = m - 2k + n - 2 + 2T \qquad \text{ve} \quad T_l = m - 2l + n - 2 + 2T$$

olsun. Bu durumda $u \in C^2(\Omega)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(T_kT_l)u &= T_k(T_lu) = (m - 2k + n - 2 + 2T)\,[(m - 2l + n - 2 + 2T)u] \\
&= (m - 2k + n - 2 + 2T)\,[(m - 2l + n - 2)u + 2Tu] \\
&= (m - 2k + n - 2)\,[(m - 2l + n - 2)u + 2Tu] + 2T\,[(m - 2l + n - 2)u + 2 \\
&= (m - 2k + n - 2)\,[(m - 2l + n - 2)\,u] + (m - 2k + n - 2)\,(2Tu) + \\
&\quad\; 2T\,[(m - 2l + n - 2)\,u] + 2T(2Tu) \\
&= (m - 2l + n - 2)\,(m - 2k + n - 2)\,u + 2T\,(m - 2k + n - 2)\,u \\
&\quad\; + (m - 2l + n - 2)\,2Tu + 2T2Tu \\
&= (m - 2l + n - 2 + 2T)\,(m - 2k + n - 2)\,u + (m - 2l + n - 2 + 2T)\,2Tu \\
&= (m - 2l + n - 2 + 2T)\,[(m - 2k + n - 2 + 2T)\,u] \\
&= T_l\,(T_ku) = (T_lT_k)u
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$T_kT_l = T_lT_k$$

olduğu görülmektedir.

$k = l$ durumunda ise aşikar olarak sağlandığından $T_j \ \ (j = 0, 1, ..., p-1)$ operatörlerinin çarpıma göre değişme özelliği vardır.

Teorem 4.2.6. Δ Laplace operatörü olmak üzere $T_j \ \ (j = 0, 1, ..., p-1)$ ler (4.2.8) ile tanımlansın. Bu durumda

$$\Delta T_j = (4 + T_j)\Delta \quad ; \quad j = 0, 1, ..., p-1 \qquad (4.2.9)$$

dir.

İspat: $u \in C^3(\Omega)$ şeklindeki bir fonksiyon ve $j = 0, 1, ..., p-1$ için

$$\begin{aligned} (\Delta T_j)u &= \Delta(T_j u) = \Delta\left[(m - 2j + n - 2 + 2T)u\right] \\ &= \Delta\left[(m - 2j + n - 2)u\right] + \Delta(2Tu) \\ &= (m - 2j + n - 2)\Delta u + 2(\Delta T)u \end{aligned}$$

bulunur. (4.2.7) eşitliğinden $\Delta T = (2 + T)\,\Delta$ olduğu dikkate alınırsa, bu durumda

$$\begin{aligned} (\Delta T_j)u &= (m - 2j + n - 2)\Delta u + 2\left[(2 + T)\Delta\right]u \\ &= (m - 2j + n - 2)\Delta u + (4 + 2T)\Delta u \\ &= \left[4 + (m - 2j + n - 2 + 2T)\right]\Delta u \\ &= (4 + T_j)\Delta u \end{aligned}$$

olur ki buradan $j = 0, 1, ..., p-1$ için

$$\Delta T_j = (4 + T_j)\Delta$$

sonucu elde edilir.

Teorem 4.2.7. $u \in C^{2p}$ harmonik bir fonksiyon ve $p \geq 2$ olan bir tamsayı olmak üzere

$$\Delta^p(r^m u) = r^{m-2p}\prod_{j=0}^{p-1}(m - 2j)\left(m - 2j + n - 2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)u \qquad (4.2.10)$$

dir.

İspat: Teoremin ispatında tümevarım metodu kullanılacaktır. Belirtelim ki; (4.2.2) ifadesi (4.2.6) kullanılarak

$$\Delta(r^m u) = mr^{m-2}(m+n-2+2T)\,u \qquad (4.2.11)$$

şeklinde de yazılabilir.

Tümevarım metoduna göre ilk olarak, $p = 2$ için (4.2.10) ifadesinin doğruluğunu gösterelim. (4.2.11) eşitliğinin her iki yanına Δ Laplace operatörü uygulanırsa

$$\Delta\left[\Delta(r^m u)\right] = \Delta\left[mr^{m-2}(m+n-2+2T)\,u\right]$$

$$\Delta^2(r^m u) = m(m+n-2)\Delta(r^{m-2}u) + 2m\Delta\left(r^{m-2}Tu\right) \qquad (4.2.12)$$

elde edilir. (4.2.11) de m yerine $m-2$ alınırsa

$$\Delta(r^{m-2}u) = (m-2)\,r^{m-4}(m-2+n-2+2T)\,u \qquad (4.2.13)$$

bulunur. Ayrıca Teorem 4.2.4. den ve u fonksiyonu harmonik olduğundan dolayı $\Delta u = 0$ olup

$$\Delta(Tu) = (2+T)\,\Delta u = 0$$

dır. Buradan Tu nun da harmonik bir fonksiyon olduğu görülmektedir. Tu nun harmonikliği dikkate alınarak (4.2.11) de m yerine $m-2$ ve u harmonik fonksiyonu yerine de Tu konulursa

$$\Delta(r^{m-2}Tu) = (m-2)\,r^{m-4}(m-2+n-2+2T)\,Tu \qquad (4.2.14)$$

elde edilir. (4.2.14) ve (4.2.13), (4.2.12) de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Delta^2(r^m u) &= m(m+n-2)\,(m-2)\,r^{m-4}(m-2+n-2+2T)\,u \\ &\quad +2m\,(m-2)\,r^{m-4}(m-2+n-2+2T)\,Tu\end{aligned}$$

$$\Delta^2(r^m u) \;=\; m\,(m-2)\,r^{m-4}(m-2+n-2+2T)(m+n-2+2T)u$$

bulunur. $T = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ konulursa

$$\Delta^2(r^m u) = r^{m-4} m\,(m-2)\left(m-2+n-2+2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(m+n-2+2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) u$$

elde edilir. Eşitliğin sağındaki operatörler Teorem 4.2.5. den dolayı değişme özelliğine sahip olduğundan

$$\Delta^2(r^m u) = r^{m-4} m\,(m-2)\left(m+n-2+2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(m-2+n-2+2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) u$$

bulunur ki bu sonuç $p = 2$ için (4.2.10) u gerçekler.

$p-1$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\Delta^{p-1}(r^m u) = r^{m-2(p-1)} \prod_{j=0}^{p-2}(m-2j)\left(m-2j+n-2+2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) u \qquad (4.2.15)$$

doğru olsun. Burada (4.2.6) ve (4.2.8) eşitlikleri kullanılırsa

$$\Delta^{p-1}(r^m u) = r^{m-2(p-1)} m(m-2)...\,(m-2(p-2))\, T_0 T_1 ... T_{p-2} u \qquad (4.2.16)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanına Δ Laplace operatörü tekrar uygulanırsa

$$\Delta\left[\Delta^{p-1}(r^m u)\right] = m(m-2)...\,(m-2(p-2))\,\Delta\left[r^{m-2(p-1)} T_0 T_1 ... T_{p-2} u\right] \qquad (4.2.17)$$

bulunur. Diğer yandan Teorem 4.2.6. dan dolayı

$$\Delta T_j = (4+T_j)\Delta \quad ; \quad j = 0, 1, ..., p-1$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\Delta T_0T_1...T_{p-3}T_{p-2} &= (4+T_0)\Delta T_1...T_{p-3}T_{p-2} \\
&\quad ... \\
&= (4+T_0)(4+T_1)...(4+T_{p-3})\Delta T_{p-2} \\
&= (4+T_0)(4+T_1)...(4+T_{p-3})(4+T_{p-2})\Delta
\end{aligned}
$$

yazılabilir. u fonksiyonu harmonik olduğundan $\Delta u = 0$ olup

$$
\Delta T_0T_1...T_{p-2}u = (4+T_0)(4+T_1)...(4+T_{p-2})\Delta u = 0
$$

olarak bulunur. Buradan $T_0T_1...T_{p-2}u$ nun da harmonik olduğu görülmektedir. Dolayısıyla $T_0T_1...T_{p-2}u$ nun harmonikliği dikkate alınarak ve (4.2.11) den yararlanarak

$$
\Delta\left[r^{m-2(p-1)}T_0T_1...T_{p-2}u\right] =
$$

$$
= (m-2(p-1))\, r^{m-2(p-1)-2} \qquad (m-2(p-1)+n-2+2T)\, T_0T_1...T_{p-2}u \tag{4.2.18}
$$

bulunur. $m-2(p-1)+n-2+2T = T_{p-1}$ dir ve $j = 0,1,...,p-1$ için T_j ler değişme özelliğine sahip olduğundan (4.2.18) eşitliği,

$$
\Delta\left[r^{m-2(p-1)}T_0T_1...T_{p-2}u\right] = (m-2(p-1))\, r^{m-2(p-1)-2}T_0T_1...T_{p-2}T_{p-1}u
$$

şeklinde yazılabilir. Bu sonuç (4.2.17) de kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\Delta^p(r^m u) &= m(m-2)...(m-2(p-2))\,(m-2(p-1))\, r^{m-2(p-1)-2}T_0T_1...T_{p-2}T_{p-1}u \\
&= m(m-2)...(m-2(p-1))\, r^{m-2p}T_0T_1...T_{p-1}u \\
&= r^{m-2p}\left(\prod_{j=0}^{p-1}(m-2j)T_j\right)u
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada

$$
T_j = m-2j+n-2+2T \quad , \quad T = \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial}{\partial x_i} \quad ; \quad j = 0,1,...,p-1
$$

alınırsa

$$\Delta^p(r^m u) = r^{m-2p}\prod_{j=0}^{p-1}(m-2j)\left(m-2j+n-2+2\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)u$$

elde edilir ki bu sonuç (4.2.10) un kendisidir. Yani; $p-1$ için doğru olduğu kabul edilmiş olan (4.2.10) un p için de doğru olduğu görülür. Böylece tümevarımla ispat tamamlanmıştır.

Teorem 4.2.8. $u_\lambda \in C^{2p}(\Omega)$, λ-yıncı dereceden homogen harmonik bir fonksiyon ve $r = \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}$ olsun. Bu durumda, m herhangi bir reel sayı ve $p \geq 2$ olan bir tamsayı olmak üzere

$$\Delta^p(r^m u_\lambda) = r^{m-2p}\prod_{j=0}^{p-1}(m-2j)\,(m-2j+n-2+2\lambda)\,u_\lambda \tag{4.2.19}$$

dır.

İspat: λ-yıncı dereceden homogen u_λ harmonik fonksiyonu, Euler teoreminden dolayı

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} = \lambda u_\lambda$$

eşitliğini gerçeklediğinden bu sonuç Teorem 4.2.7. deki (4.2.10) eşitliğinde kullanılırsa

$$\Delta^p(r^m u_\lambda) = r^{m-2p}\prod_{j=0}^{p-1}(m-2j)\,(m-2j+n-2+2\lambda)\,u_\lambda$$

elde edilir.

Teorem 4.2.9. $j = 0, 1, ..., p-1$ için $u_{\lambda_j} \in C^{2p}(\Omega)$ ler λ_j-yinci dereceden homogen harmonik fonksiyonlar olmak üzere

$$w_1 = \sum_{j=0}^{p-1}r^{2j}\,u_{\lambda_j} \quad \text{ve} \quad w_2 = \sum_{j=0}^{p-1}r^{2j-n+2-2\lambda_j}u_{\lambda_j}$$

fonksiyonları $\Delta^p w = 0$ denkleminin çözümleridir.

İspat: Teorem 4.2.8. deki

$$\Delta^p(r^m u_\lambda) = r^{m-2p} \prod_{j=0}^{p-1} (m-2j)(m-2j+n-2+2\lambda)\, u_\lambda$$

eşitliğinde λ yerine λ_j, sırasıyla m yerine $2j$ ve $2j-n+2-2\lambda_j$ alınırsa

$$\Delta^p(r^{2j} u_{\lambda_j}) = 0 \quad ; \quad \Delta u_{\lambda_j} = 0 \quad , \quad j = 0,1,...,p-1 \tag{4.2.20}$$

ve

$$\Delta^p(r^{2j-n+2-2\lambda_j} u_{\lambda_j}) = 0 \quad ; \quad \Delta u_{\lambda_j} = 0 \quad , \quad j = 0,1,...,p-1 \tag{4.2.21}$$

bulunur. Buradan görülmektedir ki; $j = 0,1,...,p-1$ için $r^{2j}u_{\lambda_j}$ ve $r^{2j-n+2-2\lambda_j}u_{\lambda_j}$ lerin herbiri $\Delta^p w = 0$ denklemini sağlar. Bu denklem lineer olduğundan

$$w_1 = \sum_{j=0}^{p-1} r^{2j} u_{\lambda_j} \quad ; \quad \Delta u_{\lambda_j} = 0 \quad , \quad j = 0,1,...,p-1 \tag{4.2.22}$$

ve

$$w_2 = \sum_{j=0}^{p-1} r^{2j-n+2-2\lambda_j} u_{\lambda_j} \quad ; \quad \Delta u_{\lambda_j} = 0 \quad , \quad j = 0,1,...,p-1 \tag{4.2.23}$$

fonksiyonları $\Delta^p w = 0$ denkleminin çözümleridir.

Teorem 4.2.10. $\Delta^p w = 0$ poliharmonik denkleminin $w = r^m$ (m herhangi bir reel sayı) tipindeki çözümleri, A_j ve B_j ler keyfi sabitler olmak üzere

$$w_1 = \sum_{j=0}^{p-1} A_j r^{2j}$$

ve

$$w_2 = \sum_{j=0}^{p-1} B_j r^{2j-n+2}$$

şeklindedir.

İspat: $u = 1$ harmonik fonksiyonu 0. dereceden homogen olduğundan, (4.2.20) ve (4.2.21) eşitliklerinde $u_{\lambda_j} = 1$ ve $\lambda_j = 0$ alınırsa sırasıyla

$$\Delta^p(r^{2j}) = 0 \quad ; \quad j = 0,1,...,p-1$$

ve

$$\Delta^p(r^{2j-n+2}) = 0 \quad ; \quad j = 0,1,...,p-1$$

olacaktır. Buradan görülmektedir ki; $j = 0,1,...,p-1$ için r^{2j} ve r^{2j-n+2} fonksiyonlarının herbiri $\Delta^p w = 0$ poliharmonik denklemini sağlar. $\Delta^p w = 0$ denklemi lineer olduğundan bu çözümlerin lineer kombinasyonu da denklemin çözümleridir. Bu durumda $\Delta^p w = 0$ denkleminin çözümü,

$$w = \sum_{j=0}^{p-1} A_j r^{2j} + \sum_{j=0}^{p-1} B_j r^{2j-n+2}$$

şeklindedir.

4.3. Almansi Açılımı

Teorem 4.3.1. $j = 0,1,...,p-1$ için u_j ler harmonik fonksiyonlar olmak üzere

$$w = \sum_{j=0}^{p-1} r^{2j} u_j \tag{4.3.1}$$

fonksiyonu $\Delta^p w = 0$ poliharmonik denkleminin çözümüdür.

İspat: Teorem 4.2.7. deki

$$\Delta^p(r^m u) = r^{m-2p} \prod_{j=0}^{p-1} (m-2j) \left(m - 2j + n - 2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) u$$

eşitliğinde $m = 2j$ alınırsa

$$\Delta^p(r^{2j} u_j) = 0 \quad ; \quad \Delta u_j = 0 \quad , \quad j = 0,1,...,p-1$$

elde edilir. Buradan $j = 0,1,...,p-1$ için $r^{2j} u_j$ lerin herbiri $\Delta^p w = 0$ denklemini sağlar. Bu denklem lineer olduğundan

$$w = \sum_{j=0}^{p-1} r^{2j} u_j \quad ; \quad \Delta u_j = 0 \quad , \quad j = 0, 1, ..., p-1$$

fonksiyonu çözümdür.

Özel olarak; u_0, u_1, u_2 harmonik fonksiyonlar olmak üzere $p = 2$ olması halinde

$$w = u_0 + r^2 u_1$$

fonksiyonu biharmonik, $p = 3$ olması halinde ise

$$w = u_0 + r^2 u_1 + r^4 u_2$$

ifadesi poliharmonik fonksiyondur.

$j = 0, 1, ..., p-1$ için u_j ler harmonik fonksiyonlar olmak üzere, bir poliharmonik fonksiyonunun harmonik fonksiyonlar cinsinden

$$w = \sum_{j=0}^{p-1} r^{2j} u_j$$

şeklindeki açılımına *Almansi açılımı* denir.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ EKSENSEL SİMETRİK POTANSİYEL TEORİ (GASPT) DENKLEMİ ve BAZI ÇÖZÜMLERİ

5.1. Genelleştirilmiş Eksensel Simetrik Potansiyel Teori (GASPT) Denklemi

Tanım 5.1.1. $\alpha_1, ..., \alpha_n$ ler reel sabitler olmak üzere

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\alpha_i}{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0 \tag{5.1.1}$$

eliptik denklemine *Genelleştirilmiş Eksensel Simetrik Potansiyel Teori (GASPT) Denklemi* denir. Bu denklemi sağlayan $u \in C^2(\Omega)$ fonksiyonlarına da *Genelleştirilmiş Eksensel Simetrik Potansiyel Fonksiyon* denir.

Özel olarak, $i = 1, ..., n$ için $\alpha_i = 0$ olması durumunda (5.1.1) denklemi Laplace denklemine dönüşür.

5.2. L Operatörünün Bazı Özellikleri

Teorem 5.2.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de $u, v \in C^2(\Omega)$ olsun. Bu takdirde (5.1.1) de L operatörü için

$$L(uv) = vL(u) + uL(v) + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \tag{5.2.1}$$

dir.

İspat: $i = 1, ..., n$ için $\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = v\frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial v}{\partial x_i}$ ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(uv) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(uv)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \\ &= v\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan

$$\begin{aligned}
L(uv) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(v\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}+2\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)+\frac{\alpha_i}{x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}+u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}+\frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)+2\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right]\\
&= v\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+u\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}+\frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)+2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\\
&= vL(u)+uL(v)+2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 5.2.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de $u \in C^2(\Omega)$ fonksiyonu $Lu = 0$ denkleminin bir çözümü ve $r = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ olsun. O takdirde m herhangi bir reel sayı,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial}{\partial x_i} = T \tag{5.2.2}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha \tag{5.2.3}$$

olmak üzere

$$L(r^m u) = mr^{m-2}\,(m+n-2+\alpha+2T)\,u \tag{5.2.4}$$

dir.

İspat: Teorem 5.2.1. ile verilen

$$L(uv) = vL(u)+uL(v)+2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

eşitliğinde v yerine r^m konulursa

$$L(r^m u) = r^m L(u)+uL(r^m)+2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial r^m}{\partial x_i} \tag{5.2.5}$$

elde edilir.

$$\frac{\partial r^m}{\partial x_i} = mr^{m-1}\frac{\partial r}{\partial x_i} = mr^{m-1}\frac{x_i}{r} = mx_i r^{m-2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 r^m}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial r}{\partial x_i}\left(\frac{\partial r^m}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial r}{\partial x_i}\left(mx_i r^{m-2}\right) \\
&= mr^{m-2} + m(m-2)x_i r^{m-3}\frac{\partial r}{\partial x_i} \\
&= mr^{m-2} + m(m-2)x_i^2 r^{m-4}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
L(r^m) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 r^m}{\partial x_i^2} + \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial r^m}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[mr^{m-2} + m(m-2)x_i^2 r^{m-4} + \frac{\alpha_i}{x_i}mx_i r^{m-2}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[mr^{m-2} + m(m-2)x_i^2 r^{m-4} + \alpha_i mr^{m-2}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} mr^{m-2} + \sum_{i=1}^{n} m(m-2)r^{m-4}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} mr^{m-2}\alpha_i \\
&= mr^{m-2}\sum_{i=1}^{n} 1 + m(m-2)r^{m-4}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + mr^{m-2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i
\end{aligned}$$

olup burada $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \alpha$ ve $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/2} = r$ den yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
L(r^m) &= mnr^{m-2} + m(m-2)r^{m-4}r^2 + m\alpha r^{m-2} \\
&= mnr^{m-2} + m(m-2)r^{m-2} + m\alpha r^{m-2} \\
&= mr^{m-2}\left(m+n-2+\alpha\right) \qquad (5.2.6)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca, $\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial}{\partial x_i} = T$ şeklinde tanımlandığını dikkate alarak

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial r^m}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} mr^{m-1}\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} mr^{m-1}\frac{x_i}{r}\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial r^m}{\partial x_i} &= \sum_{i=1}^{n} m r^{m-2x_i} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = m r^{m-2}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ &= m r^{m-2} T u \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

şeklinde elde edilir. u nun $Lu = 0$ denkleminin çözümü olduğunu gözönünde bulundurarak (5.2.6) ve (5.2.7) ile edilen sonuçlar (5.2.5) de yerine yazılırsa

$$L(r^m u) = m r^{m-2}\left(m + n - 2 + \alpha + 2T\right) u$$

bulunur ki bu, ispatı tamamlar.

Teorem 5.2.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de $u_\lambda \in C^2(\Omega)$, $Lu = 0$ denkleminin λ-yıncı dereceden homogen bir çözümü ve $r = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ olsun. Bu durumda, m herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$L(r^m u_\lambda) = m(m + n + \alpha + 2\lambda - 2) r^{m-2} u_\lambda \tag{5.2.8}$$

dir.

İspat: λ-yıncı dereceden homogen u_λ fonksiyonu, Euler teoreminden dolayı

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} = T u_\lambda = \lambda u_\lambda \tag{5.2.9}$$

eşitliğini gerçekler. Bu sonuç (5.2.4) de kullanılırsa

$$\begin{aligned} L(r^m u_\lambda) &= m(m + n + \alpha - 2) r^{m-2} u_\lambda + 2 m r^{m-2} T u_\lambda \\ &= m(m + n + \alpha - 2) r^{m-2} u_\lambda + 2 m r^{m-2} \lambda u_\lambda \\ &= m(m + n + \alpha + 2\lambda - 2) r^{m-2} u_\lambda \end{aligned}$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 5.2.4. c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$u_1 = c_1 \;\text{ ve }\; u_2 = c_2 r^{2-n-\alpha}$$

fonksiyonlarının herbiri $Lu = 0$ denkleminin çözümleridir.

İspat: Teorem 5.2.2. deki

$$L(r^m u) = mr^{m-2}(m + n - 2 + \alpha + 2T)\, u$$

eşitliğinde $u = 1$ ve m yerine sırasıyla 0 ve $2 - n - \alpha$ alınırsa

$$L(1) = 0$$

ve

$$L\left(r^{2-n-\alpha}\right) = 0$$

elde edilir. Buradan görülmektedir ki, 1 ve $r^{2-n-\alpha}$ fonksiyonlarının herbiri $Lu = 0$ denklemini sağlar. $Lu = 0$ denklemi lineer olduğundan bu çözümlerin lineer kombinasyonu olan

$$u = c_1 + c_2 r^{2-n-\alpha} \tag{5.2.10}$$

ifadesi de çözümdür. Bu sonuç, $Lu = 0$ denkleminin $u = r^m$ tipindeki çözümüdür.

Teorem 5.2.5. $\alpha_1, ..., \alpha_n$ ler reel sabitler ve $r = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ olmak üzere

$$Lu = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0$$

denkleminin $u = f(r)$ tipindeki çözümleri, c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$u = c_1 + c_2 r^{2-n-\alpha}$$

şeklindedir. Burada $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha$ dır.

İspat: $u = f(r)$, $Lu = 0$ denklemini sağlamalıdır. O halde

$$L(f(r)) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x_i^2} + \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial f(r)}{\partial x_i}\right) = 0 \tag{5.2.11}$$

olmalıdır. Diğer yandan

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x_i} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r)\frac{x_i}{r}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f(r)}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f'(r)\frac{x_i}{r}\right) \\
&= f''(r)\frac{x_i}{r}\frac{\partial r}{\partial x_i} + f'(r)\frac{1}{r} - f'(r)\frac{x_i}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_i} \\
&= f'(r)\frac{1}{r} - f'(r)\frac{x_i^2}{r^3} + f''(r)\frac{x_i^2}{r^2}
\end{aligned}$$

türevleri (5.2.11) de yazılırsa

$$\begin{aligned}
L(f(r)) &= \sum_{i=1}^{n}\left(f'(r)\frac{1}{r} - f'(r)\frac{x_i^2}{r^3} + f''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \frac{\alpha_i}{x_i}f'(r)\frac{x_i}{r}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[f'(r)\frac{1}{r}(1+\alpha_i) + \left(f''(r)\frac{1}{r^2} - f'(r)\frac{1}{r^3}\right)x_i^2\right] \\
&= f'(r)\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i) + \left(f''(r)\frac{1}{r^2} - f'(r)\frac{1}{r^3}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \\
&= f'(r)\frac{1}{r}(n+\alpha) + \left(f''(r)\frac{1}{r^2} - f'(r)\frac{1}{r^3}\right)r^2 \\
&= f''(r) + (n+\alpha-1)f'(r)\frac{1}{r} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olmalıdır. Burada $r \neq 0$ olduğundan bağımlı değişken içermeyen

$$f''(r) + (n+\alpha-1)f'(r)\frac{1}{r} = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada, $f'(r) = w$ denirse $f''(r) = w'$ olup bunların yukarıda yerlerine yazılmasıyla elde edilen

$$w' + (n+\alpha-1)w\frac{1}{r} = 0$$

lineer diferensiyel denklemi çözüldüğünde

$$w = cr^{1-n-\alpha}$$

bulunur. $w = f'(r)$ den

$$f'(r) = cr^{1-n-\alpha}$$

olup bu diferensiyel denklem çözülürse $\dfrac{c}{2-n-\alpha} = c_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{c}{2-n-\alpha} r^{2-n-\alpha} + c_1 \\ &= c_1 + c_2 r^{2-n-\alpha} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Bu son iki teoremden görülmektedir ki;

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\alpha_i}{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0$$

denkleminin $u = r^m$ ve $u = f(r)$ tipindeki çözümleri çakışıktır. Yani denklemin r ye bağlı tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$u = c_1 + c_2 r^{2-n-\alpha}$$

ile verilir.

Teorem 5.2.6. L operatörü (5.1.1) ile ve T operatörü (5.2.2) ile verilmek üzere

$$LT = (2+T)\,L \tag{5.2.12}$$

dir.

İspat: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de $u \in C^3(\Omega)$ olsun. Bu durumda

$$(LT)u \;=\; L(Tu) = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\alpha_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right] \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$

$$L(Tu) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

dır. Teorem 4.2.4. den

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \left(2 + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)$$

olup bu sonuç yukarıda kullanılırsa

$$\begin{aligned}
L(Tu) &= \left(2 + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right] \\
&= \left(2 + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\left[\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\left(x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \frac{\partial u}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right] \\
&= \left(2 + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\left[\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right] \\
&= \left(2 + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\left(x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_n}\right) \\
&= x_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_1} + \ldots + x_n \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_n} \\
&= x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \frac{\alpha_1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \frac{\alpha_n}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n} \\
&= \frac{\alpha_1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\alpha_n}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)
\end{aligned}$$

olup bu değer yukarıda yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
L(Tu) &= \left(2+\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \\
&= \left(2+\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \\
&= \left(2+\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) + \left(2+\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \\
&= \left(2+\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \\
&= (2+T)Lu
\end{aligned}
$$

olur ki buradan

$$LT = (2+T)\,L$$

dir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Terorem 5.2.7. m herhangi bir reel sayı, $p \geq 2$ olan bir tamsayı, α_i ler reel sabitler olmak üzere $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ olsun ve T operatörü (5.2.2) ile verilsin. Bu takdirde

$$m - 2j + n - 2 + \alpha + 2T = T_j^* \quad ; \quad j = 0, 1, ..., p-1 \tag{5.2.13}$$

olarak tanımlanan T_j^* $(j = 0, 1, ..., p-1)$ operatörleri çarpıma göre değişme özelliğine sahiptir.

İspat: $k \neq l$ olmak üzere $j = k$ ve $j = l$ için karşılık gelen operatörler sırasıyla

$$T_k^* = m - 2k + n - 2 + \alpha + 2T \quad \text{ve} \quad T_l^* = m - 2l + n - 2 + \alpha + 2T$$

olsun. Bu durumda $u \in C^2(\Omega)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
(T_k^* T_l^*)u &= T_k^*(T_l^* u) = (m - 2k + n - 2 + \alpha + 2T)\left[(m - 2l + n - 2 + \alpha + 2T)u\right] \\
&= (m - 2k + n - 2 + \alpha + 2T)\left[(m - 2l + n - 2 + \alpha)u + 2Tu\right] \\
&= (m - 2k + n - 2 + \alpha)\left[(m - 2l + n - 2 + \alpha)u + 2Tu\right] \\
&\quad + 2T\left[(m - 2l + n - 2 + \alpha)u + 2Tu\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(T_k^* T_l^*)u &= (m-2k+n-2+\alpha)\left[(m-2l+n-2+\alpha)\,u\right] + (m-2k+n-2+\alpha)\,(2Tu) \\
&\quad +2T\left[(m-2l+n-2+\alpha)\,u\right] + 2T(2Tu) \\
&= (m-2l+n-2+\alpha)\,(m-2k+n-2+\alpha)\,u + 2T\,(m-2k+n-2+\alpha)\,u \\
&\quad + (m-2l+n-2+\alpha)\,2Tu + 2T2Tu \\
&= (m-2l+n-2+\alpha+2T)\,(m-2k+n-2+\alpha)\,u \\
&\quad + (m-2l+n-2+\alpha+2T)\,2Tu \\
&= (m-2l+n-2+\alpha+2T)\left[(m-2k+n-2+\alpha+2T)\,u\right] \\
&= T_l^*(T_k^*)u = (T_l^* T_k^*)u
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$T_k^* T_l^* = T_l^* T_k^* \tag{5.2.14}$$

olduğu görülmektedir.

$k = l$ durumunda ise aşikar olarak sağlandığından T_j^* $(j = 0, 1, ..., p-1)$ operatörlerinin çarpıma göre değişme özelliği vardır.

Teorem 5.2.8. L operatörü (5.1.1) ile ve T_j^* $(j = 0, 1, ..., p-1)$ ler (5.2.13) ile verilmek üzere

$$LT_j^* = (4 + T_j^*)L \quad ; \quad j = 0, 1, ..., p-1 \tag{5.2.15}$$

dir.

İspat: $u \in C^3(\Omega)$ şeklindeki bir fonksiyon ve $j = 0, 1, ..., p-1$ için

$$
\begin{aligned}
(LT_j^*)u &= L(T_j^* u) = L\left[(m-2j+n-2+\alpha+2T)u\right] \\
&= L\left[(m-2j+n-2+\alpha)u\right] + L(2Tu) \\
&= (m-2j+n-2+\alpha)Lu + 2(LT)u
\end{aligned}
$$

bulunur. Teorem 5.2.6. dan $LT = (2+T)\,L$ olduğu dikkate alınırsa, bu durumda

$$
\begin{aligned}
(LT_j^*)u &= (m-2j+n-2+\alpha)Lu + 2\left[(2+T)L\right]u \\
&= (m-2j+n-2+\alpha)Lu + (4+2T)Lu
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}(LT_j^*)u &= [4+(m-2j+n-2+\alpha+2T)]\,Lu\\ &= (4+T_j^*)Lu\end{aligned}$$

olur ki buradan $j=0,1,...,p-1$ için

$$LT_j^*=(4+T_j^*)\,L$$

sonucu elde edilir.

Teorem 5.2.9. $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ de $u\in C^{2p}(\Omega)$ fonksiyonu $Lu=0$ denkleminin bir çözümü ve $r=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}$ olsun. O takdirde m herhangi bir reel sayı, $p\geq 2$ olan bir tamsayı,

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}=T$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\alpha$$

olmak üzere

$$L^p(r^m u)=r^{m-2p}\prod_{j=0}^{p-1}(m-2j)\,(m-2j+n-2+\alpha+2T)\,u \tag{5.2.16}$$

dir.

İspat: Teoremin ispatında tümevarım metodu kullanılacaktır. Tümevarım metoduna göre ilk olarak, $p=2$ için (5.2.16) ifadesinin doğruluğunu gösterelim. (5.2.4) ile tanımlanan

$$L(r^m u)=mr^{m-2}\,(m+n-2+\alpha+2T)\,u$$

eşitliğinin her iki yanına L operatörü uygulanırsa

$$L\left[L(r^m u)\right]=L\left[mr^{m-2}\,(m+n-2+\alpha+2T)\,u\right]$$

$$L^2(r^m u)=m(m+n-2+\alpha)L(r^{m-2}u)+2mL\left(r^{m-2}Tu\right) \tag{5.2.17}$$

elde edilir. (5.2.4) de m yerine $m-2$ alınırsa

$$L(r^{m-2}u) = (m-2)\,r^{m-4}\,(m-2+n-2+\alpha+2T)\,u \tag{5.2.18}$$

bulunur. (5.2.12) eşitliğinden ve u fonksiyonu $Lu = 0$ denkleminin bir çözümü olduğundan dolayı

$$L\,(Tu) = (2+T)\,Lu = 0$$

dır. Buradan Tu nun da $Lu = 0$ denkleminin bir çözümü olduğu olduğu görülmektedir. Tu nun çözüm olduğu dikkate alınarak (5.2.4) de m yerine $m-2$ ve u çözümü yerine de Tu çözümü konulursa

$$L(r^{m-2}Tu) = (m-2)\,r^{m-4}\,(m-2+n-2+\alpha+2T)\,Tu \tag{5.2.19}$$

elde edilir. (5.2.19) ve (5.2.18), (5.2.17) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L^2(r^m u) &= m(m+n-2+\alpha)\,(m-2)\,r^{m-4}\,(m-2+n-2+\alpha+2T)\,u \\ &\quad +2m\,(m-2)\,r^{m-4}\,(m-2+n-2+\alpha+2T)\,Tu \\ &= m\,(m-2)\,r^{m-4}(m-2+n-2+\alpha+2T)(m+n-2+\alpha+2T)u \end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin sağındaki operatörler, (5.2.14) den dolayı değişme özelliğine sahip olduğundan yukarıdan

$$L^2(r^m u) = r^{m-4}m\,(m-2)\,(m+n-2+\alpha+2T)\,(m-2+n-2+\alpha+2T)\,u$$

bulunur ki bu sonuç $p=2$ için (5.2.16) yı gerçekler.

$p-1$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$L^{p-1}(r^m u) = r^{m-2(p-1)}\prod_{j=0}^{p-2}(m-2j)\,(m-2j+n-2+\alpha+2T)\,u \tag{5.2.20}$$

doğru olsun. Burada (5.2.13) eşitlikleri kullanılırsa

$$L^{p-1}(r^m u) = r^{m-2(p-1)} m(m-2)...(m-2(p-2))\, T_0^* T_1^* ... T_{p-2}^* u \qquad (5.2.21)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanına L operatörü tekrar uygulanırsa

$$L\left[L^{p-1}(r^m u)\right] = m(m-2)...(m-2(p-2))\, L\left[r^{m-2(p-1)} T_0^* T_1^* ... T_{p-2}^* u\right] \qquad (5.2.22)$$

bulunur. Diğer yandan (5.2.15) den dolayı

$$LT_j^* = (4+T_j^*)L \quad ; \quad j = 0, 1, ..., p-1$$

olduğundan

$$\begin{aligned} LT_0^* T_1^* ... T_{p-3}^* T_{p-2}^* &= (4+T_0^*) LT_1^* ... T_{p-3}^* T_{p-2}^* \\ &\quad ... \\ &= (4+T_0^*)(4+T_1^*)...(4+T_{p-3}^*) LT_{p-2}^* \\ &= (4+T_0^*)(4+T_1^*)...(4+T_{p-3}^*)(4+T_{p-2}^*) L \end{aligned}$$

şeklindedir. u fonksiyonu $Lu = 0$ denkleminin bir çözümü olduğundan dolayı

$$LT_0^* T_1^* ... T_{p-2}^* u = (4+T_0^*)(4+T_1^*)...(4+T_{p-2}^*) Lu = 0$$

elde edilir. Buradan görülmektedir ki; $T_0^* T_1^* ... T_{p-2}^* u$ fonksiyonu da $Lu = 0$ denkleminin bir çözümüdür. Dolayısıyla $T_0^* T_1^* ... T_{p-2}^* u$ nun çözüm olduğu dikkate alınarak (5.2.4) de m yerine $m-2$ ve u çözümü yerine de $T_0^* T_1^* ... T_{p-2}^* u$ çözümü konulursa

$$L\left[r^{m-2(p-1)} T_0^* T_1^* ... T_{p-2}^* u\right] =$$

$$= (m-2(p-1))\, r^{m-2(p-1)-2} \quad (m-2(p-1)+n-2+\alpha+2T)\, T_0^* T_1^* ... T_{p-2}^* u \qquad (5.2.23)$$

bulunur. $m-2(p-1)+n-2+\alpha+2T = T_{p-1}^*$ ve $j = 0, 1, ..., p-1$ için T_j^* ler değişme özelliğine sahip olduğundan (5.2.23) eşitliği,

$$L\left[r^{m-2(p-1)}T_0^*...T_{p-2}^*u\right] = (m-2(p-1))\, r^{m-2(p-1)-2}T_0^*T_1^*...T_{p-2}^*T_{p-1}^*u$$

şeklinde olur. Bu sonuç (5.2.22) de kullanılırsa

$$\begin{aligned} L^p(r^m u) &= m(m-2)...(m-2(p-2))\,(m-2(p-1))\, r^{m-2(p-1)-2}T_0^*T_1^*...T_{p-2}^*T_{p-1}^*u \\ &= m(m-2)...(m-2(p-1))\, r^{m-2p}T_0^*T_1^*...T_{p-1}^*u \\ &= r^{m-2p}\left(\prod_{j=0}^{p-1}(m-2j)T_j^*\right)u \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$T_j^* = m-2j+n-2+\alpha+2T \quad , \quad j=0,1,...,p-1$$

alınırsa

$$L^p(r^m u) = r^{m-2p}\prod_{j=0}^{p-1}(m-2j)\,(m-2j+n-2+\alpha+2T)\,u$$

elde edilir ki bu sonuç (5.2.16) nın kendisidir. Yani; $p-1$ için doğru olduğu kabul edilmiş olan (5.2.16) nın p için de doğruluğu görülür. Böylece tümevarımla ispat tamamlanmıştır.

Teorem 5.2.10. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de $u_\lambda \in C^{2p}(\Omega)$ fonksiyonu $Lu = 0$ denkleminin λ-yıncı dereceden homogen bir çözümü ve $r = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ olsun. Bu durumda, m herhangi bir reel sayı ve $p \geq 2$ olan bir tamsayı olmak üzere

$$L^p(r^m u) = r^{m-2p}\prod_{j=0}^{p-1}(m-2j)\,(m-2j+n-2+\alpha+2\lambda)\,u_\lambda \tag{5.2.24}$$

dır.

İspat: λ-yıncı dereceden homogen u_λ fonksiyonu, Euler teoreminden dolayı

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} = Tu_\lambda = \lambda u_\lambda$$

eşitliğini gerçekler. Bu sonuç, Teorem 5.2.9. daki (5.2.16) eşitliğinde kullanılırsa

$$L^p(r^m u) = r^{m-2p} \prod_{j=0}^{p-1} (m-2j)\,(m-2j+n-2+\alpha+2\lambda)\, u_\lambda$$

elde edilir.

5.3. Poli Eksensel Simetrik Potansiyel Fonksiyonlar

Teorem 5.3.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de $j = 0,1,...,p-1$ için $u_j \in C^{2p}(\Omega)$ olmak üzere $Lu_j = 0$ olsun. Bu durumda

$$w = \sum_{j=0}^{p-1} r^{2j} u_j \tag{5.3.1}$$

fonksiyonu $L^p w = 0$ denkleminin çözümüdür.

İspat: Teorem 5.2.9. daki

$$L^p(r^m u) = r^{m-2p} \prod_{j=0}^{p-1} (m-2j)\,(m-2j+n-2+\alpha+2T)\, u$$

eşitliğinde $u = u_j$ ve $m = 2j$ alınırsa

$$L^p(r^{2j} u_j) = 0 \quad ; \quad Lu_j = 0 \quad , \quad j = 0,1,...,p-1$$

elde edilir. Buradan görülmektedir ki; $j = 0,1,...,p-1$ için $r^{2j}u_j$ lerin herbiri $L^p w = 0$ denklemini sağlar. Bu denklem lineer olduğundan

$$w = \sum_{j=0}^{p-1} r^{2j} u_j \quad ; \quad Lu_j = 0 \quad , \quad j = 0,1,...,p-1$$

fonksiyonu çözümdür.

Özel olarak; $p = 3$ olması halinde $j = 0,1,2$ için $Lu_j = 0$ olmak üzere

$$w = u_0 + r^2 u_1 + r^4 u_2$$

ifadesi *poli eksensel simetrik potansiyel fonksiyon*dur.

$j = 0,1,...,p-1$ için $Lu_j = 0$ olmak üzere bir poli eksensel simetrik potansiyel fonksiyonun

$$w = \sum_{j=0}^{p-1} r^{2j} u_j$$

şeklindeki açılımına *L operatörü için Almansi açılımı* denir.

Teorem 5.3.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de $j = 0,1,...,p-1$ için $u_{\lambda_j} \in C^{2p}(\Omega)$ fonksiyonları $Lu_{\lambda_j} = 0$ denkleminin λ-yıncı dereceden homogen çözümleri olsun. Bu durumda, m herhangi bir reel sayı ve $p \geq 2$ olan bir tamsayı olmak üzere

$$w = \sum_{j=0}^{p-1} r^{2j-n+2-\alpha-2\lambda_j} u_{\lambda_j} \tag{5.3.2}$$

fonksiyonu da $L^p w = 0$ denkleminin çözümüdür.

İspat: Teorem 5.2.9. daki

$$L^p(r^m u) = r^{m-2p} \prod_{j=0}^{p-1} (m-2j)\,(m-2j+n-2+\alpha+2\lambda)\, u_\lambda$$

eşitliğinde $\lambda = \lambda_j$ ve $m = 2j - n + 2 - \alpha - 2\lambda_j$ alınırsa

$$L^p(r^{2j-n+2-\alpha-2\lambda_j} u_{\lambda_j}) = 0 \quad ; \quad Lu_{\lambda_j} = 0 \quad , \quad j = 0,1,...,p-1$$

bulunur. Buradan görülmektedir ki; $j = 0,1,...,p-1$ için $r^{2j-n+2-\alpha-2\lambda_j} u_{\lambda_j}$ lerin herbiri $L^p w = 0$ denklemini sağlar. Bu denklem lineer olduğundan

$$w = \sum_{j=0}^{p-1} r^{2j-n+2-\alpha-2\lambda_j} u_{\lambda_j} \quad ; \quad Lu_{\lambda_j} = 0 \quad , \quad j = 0,1,...,p-1$$

fonksiyonları da $L^p w = 0$ denkleminin çözümleridir.

Teorem 5.3.3. $L^p w = 0$ denkleminin $w = r^m$ (m herhangi bir reel sayı) tipindeki çözümleri, A_j ve B_j ler keyfi sabitler olmak üzere

$$w_1 = \sum_{j=0}^{p-1} A_j r^{2j}$$

ve

$$w_2 = \sum_{j=0}^{p-1} B_j r^{2j-n+2-\alpha}$$

şeklindedir.

İspat: $u = 1$ harmonik fonksiyon olduğundan, Teorem 5.2.9. daki

$$L^p(r^m u) = r^{m-2p} \prod_{j=0}^{p-1} (m-2j)(m-2j+n-2+\alpha+2T)\, u$$

eşitliğinde $u = 1$ ve sırasıyla $m = 2j$, $m = 2j - n + 2 - \alpha$ alınırsa

$$L^p(r^{2j}) = 0 \quad ; \quad j = 0, 1, ..., p-1$$

ve

$$L^p(r^{2j-n+2-\alpha}) = 0 \quad ; \quad j = 0, 1, ..., p-1$$

olacaktır. Buradan görülmektedir ki; $j = 0, 1, ..., p-1$ için r^{2j} ve $r^{2j-n+2-\alpha}$ fonksiyonlarının herbiri $L^p w = 0$ denklemini sağlar. $L^p w = 0$ denklemi lineer olduğundan bu çözümlerin lineer kombinasyonu da denklemin çözümleridir. Bu durumda $L^p w = 0$ denkleminin bir çözümü,

$$w = \sum_{j=0}^{p-1} A_j r^{2j} + \sum_{j=0}^{p-1} B_j r^{2j-n+2-\alpha} \tag{5.3.3}$$

şeklindedir. Burada A_j ve B_j ler keyfi sabitlerdir.

KAYNAKLAR

Almansi, E. 1899. Sull' Integrazione Dell' Differenziale $\Delta^{2m}u = 0$. Ann. Mat. Ser. II, III, 1-59.

Altın, A. 1982. Some Expansion Formulas for a Class of Singular Partial Differential Equations. Proc. Amer. Math. Soc. 85, no.1, pp.42-46.

Altın, A. 1982. Solution of Type r^m for a Class of Singular Equations. Internat. J.Math. & Math. Sci.5, no.3, pp.613-619.

Altın, A. and Young, E.C. 1996. Homogeneous Solutions for a Class of Singular Partial Differential Equations. Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara Ser. Vol.45, pp. 67-73.

Chester, C.R. 1971. Techniques in Partial Differential Equations. McGraw-Hill Book Co., New York.

Courant, R. and Hilbert, D. 1953. Methods of Mathematical Physics, Volume I. Interscience Publishers, New York.

Duff, G.F.D. 1956. Partial Differential Equations. University of Toronto Press, Toronto.

Forsythe, G.E. and Wasow, W.R.1960. Finite Difference Methods for Partial Differential Equations. John Wiley & Sons, New York.

Friedman, A. 1964. Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Garabedian, P.R. 1964. Partial Differential Equations. John Wiley & Sons, New York.

Gilbert, R.P. 1969. Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations. Academic Press, New York.

John, F. 1982. Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York.

Kaplan, W. 1966. Introduction to Analytic Functions. Addison-Wesley, Reading, Mass.

Kellogg, O.D. 1953. Foundations of Potential Theory. Dover Publications, New York.

Miranda, C. 1969. Partial Differential Equations of Elliptic Type. Springer-Verlag, New York.

Petrovsky, I.G. 1957. Lectures on Partial Differential Equations. Interscience Publishers, New York.

Protter, M.H. and Weinberger, H.F. 1967. Maximum Principles in Differential Equations, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Taşdelen, F. 1989. Küresel Harmonikler ve Homogen Poliharmonik Fonksiyonlar. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Zachmanoglou, E.C. and Thoe, D.W. 1975. Introduction to Partial Differential Equations with Applications. Dover Puplications, Inc., New York.

ÖZGEÇMİŞ

Silifke'de 1976 yılında doğdu. İlkokulu ve ortaokulu Silifke'de, liseyi ise İçel Anadolu Öğretmen Lisesi'nde tamamladı. 1994 yılında girdiği Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümü'nden 1998 yılında Matematik Öğretmeni ünvanıyla mezun oldu.

Milli Eğitim Bakanlığı'nda altı ay çalıştıktan sonra, Nisan 1999'da Mersin Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 35. madde kapsamında lisansüstü öğrenimi için Şubat 2000'de Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne görevlendirildi. Halen bu görevine devam etmektedir.