PADOVAN SAYILARININ GENELLEMELERİ VE UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

ORHAN DİŞKAYA

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

MERSİN
AĞUSTOS - 2023

PADOVAN SAYILARININ GENELLEMELERİ VE UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

ORHAN DİŞKAYA
ORCID ID: 0000-0001-5698-7834

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. HAMZA MENKEN
ORCID ID: 0000-0003-1194-3162

MERSİN
AĞUSTOS - 2023

ÖZET

PADOVAN SAYILARININ GENELLEMELERİ VE UYGULAMALARI

Bu çalışmada, sayı dizileri arasında önemli bir yere sahip olan Padovan sayı dizisinin çeşitli genellemeleri ve uygulama alanları incelenmiştir.

Padovan sayı dizisinin mimaride kullanılan plastik sabiti ile matematiksel bir ilişkiye sahip olduğu bilinmektedir. Bu tezde, önce plastik sabitin geometrik şekilleri ve çeşitli uygulamaları ortaya konulmuştur. Sonra, genelleştirilmiş Padovan polinom dizisi tanımlanıp bu dizinin karakteristik denklemin köklerine bağlı genel çözümü, üreteç fonksiyonları, matris gösterimi ve bazı özdeşlikleri incelenmiştir. Ardından, Padovan toplam formülünden yola çıkılarak ağırlıklı Padovan toplam formülleri elde edilmiştir. Çalışma sırasıyla şu şekilde devam etmektedir:

- Fibonacci ve Padovan sayılarının arasında kurulan bir bağıntı ile Fibonacci-Padovan sayı dizisi,
- Padovan sayı dizisinin indislerinin tek ve çift durumunda farklı sonuçları veren parçalı fonksiyon şeklindeki bi-periyodik Padovan sayı dizisi,
- Satır ve sütun ilişkisi ile kurulu simetrik Padovan sayı dizisi,
- Teknik olarak nabız atışı olarak da isimlendirilen farklı bir sayı dizilişine sahip çift diziden oluşan titreşimli Padovan sayı dizisi,
- Padovan sayıları kullanılarak elde edilmiş Pascal üçgenini andıran Padovan üçgeni dizisi tanımlanıp çeşitli özdeşliklere yer verilmiştir.

Bu genellemelere ek olarak, Bernoulli Padovan sayıları ve polinomları araştırılmış ve yeni tanımlamalar ile çeşitli yöntemler kullanılarak farklı sonuçlara ulaşılmıştır.

Son olarak, genelleştirilmiş Padovan polinom matrislerini kullanılarak genelleştirilmiş Padovan blok polinom matrisleri tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Anahtar değişimi için bir anahtar anlaşma yöntemi verilmiş ve genişletilmiş Hill şifreleme ve affine şifreleme sisteminden ilham alınarak bir açık anahtar kriptografisi önerilmiş ve sistemin güvenirliği analiz edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci sayıları, Padovan sayıları, Padovan polinomları, Padovan üçgeni, plastik sabit, kriptoloji.

Danışman: Prof. Dr. Hamza MENKEN, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.

ABSTRACT

GENERALIZATIONS AND APPLICATIONS OF PADOVAN NUMBERS

In this study, various generalizations and application areas of the Padovan number sequence, which has an important place among the number sequences, are examined.

It is known that the Padovan number sequence has a mathematical relationship with the plastic constant used in architecture. In this thesis, firstly, the geometrical shapes of the plastic constant and its various applications are presented. Then, the generalized Padovan polynomial sequence is defined and the general solution of this sequence depending on the roots of the characteristic equation, generator functions, matrix representation and some identities are examined. Then, weighted Padovan sum formulas are obtained by means of the Padovan sum formula. The study continues as follows:

- Fibonacci-Padovan sequence, which is a relation related to Fibonacci and Padovan numbers,
- Bi-periodic Padovan sequence in the form of a piecewise function that gives different results in the odd and even case of the indices of the Padovan sequence,
- Symmetrical Padovan sequence established with row and column relationship,
- Pulsating Padovan number sequence consisting of pair sequences with a different sequence of numbers, technically also called the pulse beat,
- Padovan triangle sequence resembling Pascal's triangle obtained by using Padovan numbers

is defined and various identities are included.

In addition to these generalizations, Bernoulli Padovan numbers and polynomials are investigated and different results are obtained by using new definitions and various methods.

Finally, generalized Padovan block polynomial matrices are defined using generalized Padovan polynomial matrices, and some properties are investigated. A key agreement method is given for key exchange, and a public key cryptography is proposed, inspired by the extended Hill encryption and affine encryption system, and the reliability of the system is analyzed.

Keywords: Fibonacci numbers, Padovan numbers, Padovan polynomials, Padovan triangle, plastic constant, cryptology.

Advisor: Prof. Dr. Hamza MENKEN, Department of Mathematics, Mersin University, Mersin.

TEŞEKKÜR

Doktora süresi boyunca, ilk gününden itibaren her konuda destek ve yardımlarını hiç esirgemeyen, bilgi ve birikimlerinden faydalandığım saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Hamza MENKEN'e, katkılarından dolayı tez izleme komitesinin değerli üyeleri Prof. Dr. Ahmet İPEK ve Doç. Dr. Erdinç AVAROĞLU'na, tezin incelenmesinde gerekli düzeltmelerin gerçekleştirilmesine katkılarda bulunan değerli hocalarım Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU ve Prof. Dr. Serap ŞAHİNKAYA'ya ve üzerimde emeği olan bilgilerinden faydalandığım tüm hocalarıma sonsuz teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca bugünlere gelmemde büyük katkıları olan, desteklerini ve ilgilerini her zaman yanımda hissettiğim değerli babam Ramazan DİŞKAYA, annem Hayriye DİŞKAYA ve kardeşlerime çok teşekkür ederim. Ayrıca çalışmam boyunca desteğini, sevgisini ve ilgisini hep yanımda hissettiğim sevgili eşim Sümeyye DİŞKAYA, oğullarım Muhammed Bera ve Ahmed Enes'e içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Kısaltma/Simge	**Tanım**
GPBM	Genelleştirilmiş Padovan Polinom Blok Matrisi
f_n	n. Fibonacci sayısı
$\{f_n\}_{n\geq 0}$	Fibonacci sayı dizisi
$f_n(x)$	n. Fibonacci polinomu
$\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$	Fibonacci polinom dizisi
Q	Fibonacci matrisi
Q^n	Fibonacci matrisinin n. kuvveti
Mp	Padovan matrisi
Mp_n	Padovan n. matrisi
$\{u_{m,n}\}_{m\geq 0, n\geq 0}$	Simetrik Fibonacci dizisi
$\{p_{m,n}\}_{m\geq 0, n\geq 0}$	Simetrik Padovan dizisi
$\{H(n,j)\}_{n\geq j\geq 0}$	Hosoya üçgen dizisi
$\{\rho_{m,n}\}_{m\geq n\geq 0}$	Padovan üçgen dizisi
$\{q_n\}_{n\geq 0}$	Bi-periyodik Fibonacci dizisi
$\{p_n\}_{n\geq 0}$	Bi-periyodik Padovan dizisi
e_f^t	$f-$ üstel fonksiyonu
e_P^t	$P-$ üstel fonksiyonu
$\binom{n}{k}_f$	Fibonomial katsayılar
$\binom{n}{k}_P$	Padonomial katsayılar
φ	Altın oran
p	Plastik sabit
P_n	n. Padovan sayısı
$\{P_n\}_{n\geq 0}$	Padovan sayı dizisi
T_n	n. Tribonacci sayısı
$\{T_n\}_{n\geq 0}$	Tribonacci sayı dizisi
	n. Narayana N_n sayısı
$\{N_n\}_{n\geq 0}$	Narayana sayı dizisi
$\Pr_n$	n. Perrin sayısı
$\{\Pr_n\}_{n\geq 0}$	Perrin sayı dizisi
FP_n	n. Fibonacci-Padovan sayısı
$\{FP_n\}_{n\geq 0}$	Fibonacci-Padovan sayı dizisi
B_n	n. Bernoulli sayısı

Kısaltma/Simge	Tanım
$B_n(x)$	$n.$ Bernoulli polinomu
B_n^f	$n.$ Bernoulli-Fibonacci sayısı
$B_n^f(x)$	$n.$ Bernoulli-Fibonacci polinomu
$GF(2^m)$	2^m elemanlı Galois cismi
$\wp_n^{(r)}$	$n.$ genelleştilmiş Padovan polinomu
$\left\{\wp_n^{(r)}\right\}_{n\geq 0}$	Genelleştirilmiş Padovan polinom dizisi
$P_n!$	$n.$ P-faktöriyel sayısı
$B_{n,P}$	$n.$ Bernoulli P-sayısı
$B_{n,P}(x)$	$n.$ Bernoulli P-polinomu
B_n^P	$n.$ Bernoulli-Padovan sayısı
$B_n^P(x)$	$n.$ Bernoulli-Padovan polinomu
PC_n	$n\times n$ tipinde Pascal matrisi
$PP_n[x]$	$n\times n$ tipinde Pado-Pascal matrisi
$PB_n[x]$	$n\times n$ tipinde Pado-Bernoulli matrisi
$\delta_{n,m}$	Kronecker delta
Θ	Genelleştirilmiş Padovan polinom blok matrisi
Ω	Açık metin
$\mho$	Şifreli metin
E_k	Şifreleme anahtarı
D_k	Şifreyi çözme anahtarı
$\kappa(x)$	Herhangi bir kare matris

1. GİRİŞ

Sayılar yaşamımızda karşılaştığımız durumları ölçmeye, saymaya ve etiketlemeye yarayan matematiksel nesnelerdir. Herhangi bir sayının rakam adı verilen on temel sayısal sembol kombinasyonu kullanılarak temsil edilmesini sağlayan en yaygın sayı sistemi Hint-Arap sayı sistemidir. Bu sayı sistemini Araplardan alıp Avrupa'ya aktaran Leonardo Fibonacci Hint-Arap sayıları ile aritmetik işlemler yapmanın Roma rakamlarıyla hesap yapmaktan çok daha basit ve verimli olduğunu fark etmiştir. Doğudan öğrendiği bu ilmi batıya taşıyan Fibonacci 1202 yılında yayınlanan "*Liber Abaci*" kitabında yer verdiği tavşan problemi ile günümüzde en popüler sayı dizisi olarak bilinen Fibonacci sayı dizisinin ortaya çıkmasını sağlamıştır (Koshy, 2001). Fibonacci sayı dizisi ile aynı yinelemeli bağıntısına sahip olan Lucas sayı dizisinin her bir terim önceki iki terimin toplamıdır, ancak farklı başlangıç değerlerine sahiptir (Chandra and Weisstein, 2023). Fibonacci sayı dizisinin başlangıç değerleri ile aynı olan, farklı yineleme bağıntılarına sahip Pell ve Jacobsthal sayı dizileri literatürde yer almaktadır. Ayrıca, bu tür sayı dizilerinin ortak bir özelliği de ikinci mertebeden karakteristik denkleme sahip olmalarıdır. Üçüncü mertebeden karakteristik denkleme sahip sayı dizileri de mevcuttur. Bu sayı dizilerinden biri olan Tribonacci sayı dizisi Fibonacci sayı dizisinden farklı olarak önceden belirlenmiş iki terimle başlamayıp, üç terimle başlaması ve sonraki her terim, önceki üç terimin toplamıdır. Bu çalışmanın ana başlığını oluşturan Padovan sayı dizisi de Tribonacci sayı dizisi gibi üçüncü mertebeden karakteristik denkleme sahiptir. Fibonacci sayı dizisini önemli kılan özeliklerinden biri günümüzde de popülaritesini koruyan altın oranla ilişkili olmasıdır. Padovan sayı dizisini de önemli kılan sebeplerden biri mimaride kullanılan plastik sabitle anılmasıdır. Hans van der Laan 1928 yılında mimari çalışmalarını bırakıp acemi bir keşiş olduktan kısa bir süre sonra, yeni ve benzersiz bir mimari oran sistemi keşfetmiştir. Plastik sabit olarak da adlandırdığı bu oran Padovan sayı dizisinin karakteristik denkleminin irrasyonel köküne dayanmaktadır. Bu çalışmada plastik sabitin geometrideki gösterimine ait yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Uygulamalı bilimin hızla ilerlediği günümüzde, teknolojik olayların matematik ile bağlantılı olarak ilerlediği görülmektedir. Matematiğin önemli konularından sayılar kuramı, cebirsel ifadeler, polinomlar, matrisler gibi konular mühendislik, elektronik, kuantum fiziği, istatistik, kriptoloji gibi birçok alanda kullanılmıştır. Bu çalışmada, Padovan sayı dizisinin karakteristik denkleminin pozitif reel kökü olan plastik sabit değeri ile ilişkili geometrik şekilleri, dizinin çeşitli genellemeleri, Bernoulli sayıları ile ilişkisi ve genelleştirilmiş Padovan polinom matrisleri kullanılarak elde edilen blok matrisin şifreleme sistemindeki kullanımı incelenmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Fibonacci'nin "*Liber Abaci*" kitabında yer verdiği tavşan probleminden ortaya çıkan sonucu değerlendiren Lucas, 1876 yılında Fibonacci sayı dizisini tanımlamıştır. Başlangıç koşulları olarak ilk terimi 0 ve ikinci terimi 1 olan Fibonacci sayı dizisinin diğer terimleri, her terim kendinden bir önceki terim ile toplanıp bir sonraki terim elde edilmesi ile oluşur. Bu şekilde elde edilen sayılara Fibonacci sayıları denir. Bir başka deyişle, Fibonacci sayı dizisi başlangıç koşulları $f_0 = 0$ ve $f_1 = 1$ olan $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,\ n \geq 0$ yineleme bağıntısı ile ifade edilir (Lucas, 1891).

Leonardo Fibonacci'nin matematiğe sayısız katkısına rağmen, öncelikle adını taşıyan diziyle daha çok hatırlanmaktadır. Bu sayı dizisi tanımlandığından bu yana birçok alanda yüzlerce kitap ve binlerce makalenin oluşmasında ilham kaynağı olmuştur. Fibonacci sayı dizisi hala birçok matematikçi tarafından araştırılmaktadır. Bu araştırmacıların ortaya koyduğu çalışmaların bazıları şu şekildedir:

King, yüksek lisans tezinde *Q*-matris adı verilen aşağıdaki matrisi incelemiş.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ve tümevarım yöntemi ile Fibonacci sayı dizisi ile bağlantılı matrisin $n.$ kuvvetini

$$Q^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde elde etmiştir (King, 1960).

İlk olarak 1883'te Belçikalı matematikçi Catalan tarafından incelenen Fibonacci polinomları daha sonra Alman matematikçi Jacobsthal (1882–1965) tarafından da incelenmiştir (Bicknell, 1970).

Fibonacci polinomları, $f_o(x) = 0$ ve $f_1(x) = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$f_{n+2}(x) = xf_{n+1}(x) + f_n(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanmıştır (Koshy, 2019).

Carlitz, Fibonacci sayı dizisinin yeni bir genellemesi olarak simetrik Fibonacci dizisini,

$$u_{0,n} = f_n,\ u_{1,n} = f_{n+2},\ u_{m,0} = f_m \text{ ve } u_{m,1} = f_{m+2}$$

olmak üzere $\{u_{m,n}\}_{m\geq 0, n\geq 0}$ simetrik Fibonacci dizisini,

$$u_{m,n} = u_{m,n-1} + u_{m,n-2},\ n \geq 2,$$
$$u_{m,n} = u_{m-1,n} + u_{m-2,n},\ m \geq 2$$

iki yineleme bağıntısı ile tanımlamıştır. Sonra aşağıdaki tabloyu oluşturmuştur.

Tablo 2.1. Simetrik Fibonacci dizisinin ilk birkaç terimi

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	1	2	3	5	8	13
1	1	2	3	5	8	13	21	34
2	1	3	4	7	11	18	29	47
3	2	5	7	12	19	31	50	81
4	3	8	11	19	30	49	79	128
5	5	13	18	31	49	80	129	209
6	8	21	29	50	79	129	208	337
7	13	34	47	81	128	209	337	546

Böylece, Tablo 2.1 den tanımladığı dizilerin simetri özelliği

$$u_{m,n} = u_{n,m}$$

sağladığını görmüştür (Carlitz, 1963).

Hosoya tarafından Fibonacci sayılarıyla yakından bağlantılı bir üçgen dizisi tanıtılmıştır. Bu dizi Fibonacci veya Hosoya üçgeni olarak isimlendirilmiştir. $n \geq r \geq 0$ ve $n \geq 2$ olmak üzere, n satırındaki ve r sütunundaki öğeyi gösterdiği göz önünde bulundurarak yineleme bağıntısı

$$\begin{aligned} H_{n,r} &= H_{n-1,r} + H_{n-2,r} \\ &= H_{n-1,r-1} + H_{n-2,r-2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Hosoya, 1976). Tablosu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 2 & & 1 & & 2 & & & & \\
 & & & 3 & & 2 & & 2 & & 3 & & & \\
 & & 5 & & 3 & & 4 & & 3 & & 5 & & \\
 & 8 & & 5 & & 6 & & 6 & & 5 & & 8 & \\
13 & & 8 & & 10 & & 9 & & 10 & & 8 & & 13 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Şekil 2.1. Hosoya Üçgeni

Edson ve Yayenie tarafından Fibonacci sayı dizisinin yeni bir genellemesi olan $\{q_n\}_{n\geq 0}$ bi-periyodik Fibonacci sayı dizisi, a ve b sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere başlangıç koşulları $q_0 = 0$ ve $q_1 = 1$ olan

$$q_n = \begin{cases} aq_{n-1} + q_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ bq_{n-1} + q_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

yineleme bağıntısı şeklinde tanımlanmıştır (Edson ve Yayenie, 2009). Ayrıca, birçok araştırmacı bi-periyodik Fibonacci sayı dizisinin genellemeleri ve çeşitli uygulamalarını incelemiştir (Tan vd., 2016; Uygun ve Owusu, 2016; Coskun ve Taskara, 2016; Coskun ve Taskara, 2018; Tan ve Leung, 2020; Choo, 2020).

İyi bilinen Fibonacci toplam formülü

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$$

kullanılarak Gauthier tarafından

$$\sum_{i=0}^{n} if_i = (n+1)\,f_{n+2} - f_{n+4} + 2\,,$$
$$\sum_{i=0}^{n} i^2 f_i = (n+1)^2\,f_{n+2} - (2n+3)\,f_{n+4} + 2\,f_{n+6} - 8$$

bazı ağırlıklı Fibonacci toplam formülleri elde edilmiştir (Gauthier, 1995).

Clarke de ağırlıklı Fibonacci toplam formülünün genel halini $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} i^p f_i = n^p f_{n+1} + (n+1)\,f_n - 2\sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{p-1}{2}\right]\!\right]} \binom{p}{2k+1} \left(\sum_{i=1}^{n} i^{p-2k-1} f_i \right)$$

olarak bulmuştur (Clarke, 2003).

Atanassov ve Shannon Fibonacci sayı dizisinin çeşitli genellemelerini araştırmıştır (Atanassov vd., 2002). Atanassov Fibonacci dizileriyle ilgili bu araştırma yönünü sürdürerek, titreşimli Fibonacci sayı dizileri olarak adlandırdığı yeni bir Fibonacci dizi türünü aşağıdaki şekilde tanıtmıştır:

a ve b iki sabit reel sayı olsun. $\lambda_0 = a$ ve $\mu_0 = b$ olmak üzere $k \geq 0$ doğal sayıları için $\{\lambda_k\}_{k\geq 0}$ ve $\{\mu_k\}_{k\geq 0}$ dizileri

$$\lambda_{2k+1} = \mu_{2k+1} = \lambda_{2k} + \mu_{2k}\,,$$
$$\lambda_{2k+2} = \lambda_{2k+1} + \mu_{2k}\,,$$
$$\mu_{2k+2} = \mu_{2k+1} + \lambda_{2k}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Atanassov, 2013a; 2013b; 2014).

$\binom{n}{k}_f = \dfrac{f_n!}{f_{n-k}!\,f_k!}$ Fibonomial katsayıları ve $n.$ Fibonacci sayıları f_n olmak üzere Krot tarafından Bernoulli $f-$polinomları

$$B_{n,f}(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{f_{k+1}} \binom{n}{k}_f x^{n-k}$$

biçiminde ifade edilmiştir (Krot, 2004).

Özvatan, Bernoulli-Fibonacci sayılarını ve polinomlarını üreteç fonksiyonları yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$e_F^t = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n}{F_n!}$ olmak üzere Bernoulli-Fibonacci polinomları için üstel üreteç fonksiyon

$$\frac{te_f^{tx}}{e_f^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^f(x) \frac{t^n}{f_n!}$$

ile tanımlanır. Bernoulli-Fibonacci sayıları $B_n^f(x)$ polinomlarının özel değerleridir. Öyle ki, $B_n^f = B_n^f(0)$ olmak üzere

$$\frac{t}{e_f^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^f \frac{t^n}{f_n!}$$

Bernoulli-Fibonacci sayılarının üstel üreteç fonksiyonudur (Özvatan, 2018). Ayrıca, Al-Salam ve Carlitz tarafından $q-$Bernoulli sayıları ve polinomları araştırılmıştır (Al-Salam, 1958; Carlitz, 1948). Zhang ve Whang eserlerinde Bernoulli matrisi ve cebirsel özellikleri hakkında bilgi vermiştir (Zhang ve Whang, 2006). Infante, Ramirez, ve Şahin, Bernoulli, Euler ve Fibonacci matrislerinin $q-$analoglarını incelemişler ve bu matrislerin bazı cebirsel özellikleri ispatlamışlardır. (Infante vd., 2017). Ernst tarafından $q-$Pascal ve $q-$Bernoulli matrisleri ve umbral yaklaşım ile $q-$Bernoulli ve $q-$Euler matrislerini içeren çeşitli $q-$özel matrisleri üzerine iki önemli çalışma ortaya koymuştur (Ernst, 2008; 2018). Kuş, Tuğlu ve Kim tarafından Bernoulli $f-$polinomları ve Fibo-Bernoulli matrisleri üzerine incelemeler yapılmıştır (Kuş vd., 2019). Bu incelemelerden esinlenerek bu çalışmada Bernoulli-Padovan sayıları ve polinomları tanımlanıp çeşitli özdeşlikler elde edilmiştir.

Fibonacci sayı dizisinin matrisleri kullanılarak çeşitli şifreleme sistemleri oluşturulmuştur. Bu sistemlerin temelinde Hill şifreleme yöntemi kullanılmaktadır. Hill şifreleme yöntemi, blok şifrelere örnektir. Blok şifreler, şifrelemenin aynı anda birden fazla karakterden oluşan gruplar veya bloklar halinde gerçekleştiği tüm şifreleri içerir. Hill şifreleme yöntemi, matrisler özellikle tersinir matris adı verilen matematiksel nesneleri ve bunları içeren matematiksel işlemleri kullanır (Klima ve Sigmon, 2018).

Hoggatt, kitabında Fibonacci ve Lucas sayılarının bazı ilginç özelliklerine bir giriş sunmaktadır. Böylece kitabı inceleyenler Fibonacci ve Lucas sayılarının bazı basit kavramlardan kaç tane matematiksel genelleme çıkarabileceğini gözlemleme fırsatına sahip olacaktır (Hoggatt, 1969). Philippou, Horadam ve Bergum, California San Jose Eyalet Üniversitesi tarafından düzenlenen Fibonacci sayıları ve uygulamaları üzerine uluslararası konferans bildirileri kitap haline getirilmiştir (Philippou, 1986; Bergum vd., 1998; Philippou vd., 2013). Vorobiev, "*Fibonacci numbers*" başlıklı kitabında Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu, bazı temel ve teorik özelliklerini incelemiştir. Ayrıca altın oranla ilişkili geometrik şekiller araştırmıştır (Vorobiev, 2012). Dunlap, "*The golden ratio and Fibonacci numbers*" başlıklı kitabında altın oranın temel matematiksel özellikleri ve beşli simetriye sahip iki ve üç boyutlu şekillerin boyutlarındaki oluşumu ele almaktadır. Ayrıca Fibonacci sayı dizisinin oluşumu ve genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ve bunların altın oranla ilişkisi sunulmuştur (Dunlap, 1997). Atanassov "*New visual perspectives on Fibonacci numbers*" başlıklı kitabında, Fibonacci sayı dizileri hakkında yeni fikirler edinmek isteyen araştırmacıların ve çeşitli görsel yaklaşımlardan ve bunların doğasında var olan problemlerden keyif alacak matematikçilerin doğasına hitap etmektedir. Ayrıca, farklı konuları birbirine bağlamaya yardımcı olan, altın oranın birleştirici temaları ve çeşitli genellemeler etrafında örülen hem geometrik hem de kombinatoryal diyagramlara sürekli bir vurgu vardır (Atanassov vd., 2002). Hayes doktora tezinde Fibonacci ve Lucas polinomlarına yer vermiştir (Hayes, 1970). Horadam tarafından Fibonacci'nin yeni bir genelleştirilmesi ortaya konulmuş ve çeşitli özdeşliklerine bakılmıştır (Horadam, 1961). Carlitz satır-sütun ilişkisi olan yeni Fibonacci dizileri oluşturmuştur (Carlitz, 1963). Taşçı çalışmasında dörtlü Pell sayılarını 4. mertebeden bir lineer yineleme ilişkisi açısından tanımlamış ve bunların üreteç fonksiyonu, Binet benzeri formülü ve kısmi toplamları için formüller vermiştir (Taşçı, 2009). Özkoç, Fibonacci ve Pell sayılarıyla ilişkili Fibona-Pell olarak adlandırdığı yeni bir dizi tanımlamış ve bazı cebirsel sonuçlar elde etmiştir (Özkoç, 2015). Kızılateş, Lucas ve Jacaobsthal sayılarıyla ilişkili Lucas-Jacaobsthal sayı dizisini tanımlamış ve bazı özdeşlikler elde etmiştir (Kızılateş, 2017). Dişkaya ve Menken tarafından Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas sayı dizileri ile ilişkili yeni sayı dizileri türetilmiş ve çeşitli özdeşlikler incelenmiştir (Dişkaya ve Menken, 2019). Çok sayıda araştırmacı bilimsel çalışmaları Fibonacci sayı dizisini disiplinler arası bir boyuta taşımıştır ve günümüzde de hala birçok araştırmacı Fibonacci sayı dizisi ve genellemeleri hakkında çeşitli çalışmalar vermeye devam etmektedir.

Öklid tarafından iki bin yıldan daha uzun bir süre önce keşfedildiği bilinen altın oran, Fibonacci sayı dizisi ile yakından ilişkilidir. Fibonacci sayı dizisine $f_n = x^n$ dönüşümü uygulayarak elde edilen $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{2.1}$$

dir. Fibonacci sayı dizisinin ardışık terimlerinin oranlarının yakınsadığı değer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\alpha=1,618...=\varphi$$

dir (Livio, 2008; Tattersall, 2005). Ayrıca altın oranı içeren Fibonacci sayı dizisinin kapalı formu (Binet formülü),

$$f_n=\frac{\varphi^n-(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}=\frac{\varphi^n-(-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

şeklindedir. Altın oran aynı zamanda metalik oranlardan bir tanesidir. Metalik oran n pozitif tamsayı olmak üzere $x^2-nx-1=0$ denkleminin pozitif reel köküdür. $n=2$ için gümüş oran elde edilir. Gümüş oran Pell sayı dizisinin karakteristik denkleminin bir pozitif reel köküdür. $n=3$ için bronz oran elde edilir. n nin diğer değerleri için metalik oran farklı isimlendirmeler alır (de Spinadel, 1998).

Metalik oranlara benzer bir oran 1924 de Cordonnier "*Plastik Sabit*" adıyla tanımlamıştır. Plastik sabit, $P_o=1$, $P_1=1$ ve $P_2=1$ başlangıç koşulları ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$P_{n+3}=P_{n+1}+P_n$$

yineleme bağıntısıyla tanımlı Padovan sayı dizisinin $P_n=x^n$ dönüşümü uygulayarak elde edilen

$$x^3-x-1=0$$

karakteristik denklemin yegane pozitif reel kökü,

$$p=\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}\approx 1,324717....$$

dir. Günümüzde birçok araştırmacı tarafından Padovan sayı dizisi ile ilgili çalışmalar ortaya konulmuştur. Bu çalışmaların bazıları aşağıda verilmiştir:

Padovan, Van der Laan'nın kitaplarında değindiği plastik sabitten etkilenerek yazdığı kitabın da Padovan sayılarını tanımlamıştır (Padovan, 1994). Stewart, "*Scientific American*" bilimsel dergide Padovan sayı dizisini ifade etmiştir (Stewart, 1996). Aynı zamanda Padovan sayı dizisi Cordonnier tarafından da keşfedildiği için Cordonnier dizisi olarak da bilinmektedir. Shannon, Anderson ve Horadam çalışmasında Cordonnier, Perrin ve van der Laan sayılarının özelliklerini incelemiştir (Shannon vd., 2006). Gogin ve Myllari, üçüncü mertebeden özel matrisler kullanılarak üretilebilen bir

Padovan benzeri dizi sınıfın herhangi bir dizisinin terimlerinin Bell polinomları ve bunların türevleri aracılığıyla ifade edilebileceğini, daha küçük indisli başka bir dizinin terimlerini bağımsız değişken olarak kullanarak göstermiştir (Gogin ve Myllari, 2016). Sokhuma tarafından Padovan *Q*-matrisi ve genelleştirilmiş bağıntıları ortaya konulmuştur (Sokhuma, 2013). Yılmaz ve Taskara, Padovan ve Perrin sayılarının matris dizilerini tanımlamıştır (Yılmaz ve Taskara, 2013). Marohnić ve Strmečki, bir uluslararası konferansta plastik sayıların yapı ve uygulamalarına değinmiştir (Marohnić ve Strmečki, 2012). Taş ve Karaduman, *m* modülüne göre Padovan dizilerini araştırmış, $(x, y) \in G$ üreteç çifti için *2*-üreteçli G grubunun Padovan yörüngesini tanımlamış ve periyotlarının uzunluklarını incelemiştir (Taş ve Karaduman, 2014). Deveci ve Karaduman çalışmasında Padovan *p*-sayılarını tanımlamış ve bunların üretici matrisi, Binet formülü, üreteç fonksiyon, üstel gösterim, kombinatoryal gösterimler ve toplamlar gibi çeşitli özdeşliklerini elde etmişlerdir (Deveci ve Karaduman, 2017). Goy, terimleri Padovan sayıları olan Toeplitz-Hessenberg determinantlarının bazı özdeşliklerini araştırmıştır (Goy, 2018). Taşçı çalışmasında Gauss Padovan ve Gauss Pell-Padovan dizilerini tanımlamıştır (Taşçı, 2018). Cerda-Morales arşivdeki çalışmasında Padovan sayıları için yeni özdeşlikler ortaya koymuştur (Cerda-Morales, 2019).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Bazı Özel Sayı Dizileri

Bu bölümde, bazı önemli sayı dizilerinin karakteristik denklemi ikinci veya üçüncü dereceden olarak iki gruba ayrılmaktadır. İkinci dereceden karakteristik denkleme sahip dizilerden bazıları Fibonacci, Lucas, Pell ve Jacobsthal, üçüncü dereceden karakteristik denkleme sahip dizilerden bazıları da Tribonacci, Narayana, Perrin ve Padovan dizilerdir.

3.1.1. İkinci Mertebeden Yineleme Bağıntılı Özel Sayı Dizileri

Bu kısımda, ikinci mertebeden yineleme bağıntısına sahip Fibonacci, Lucas, Pell ve Jacobsthal sayı dizileri hakkında bilgilere yer verilmiştir (Koshy, 2001; 2014; 2019). Şimdi, belirli şartlar doğrultusunda bu dizileri elde edebileceğimiz genel bir dizi tanımı verelim.

Tanım 3.1.1.1. Başlangıç koşulları $g_0 = a$ ve $g_1 = b$ olacak şekilde $\{g_n\}_{n\geq 0}$ dizisi

$$g_{n+2} = mg_{n+1} + rg_n$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır. $\{g_n\}_{n\geq 0}$ dizisinden belirli başlangıç koşulları ve katsayıları ile üretilen Fibonacci, Lucas, Pell ve Jacobsthal dizileri üzerine bazı bilgiler Tablo 3.1 de verilmektedir:

Tablo 3.1. Fibonacci, Lucas, Pell ve Jacobsthal dizileri hakkında bazı bilgiler

Katsayı değerleri	Dizinin isimleri	Başlangıç koşulları	Yineleme bağıntıları	İlk birkaç terimleri	Karakteristik denklemler ve kökleri
$m = r = 1$	Fibonacci dizisi	$g_0 = 0,\ g_1 = 1$	$g_{n+2} = g_{n+1} + g_n$	$0,1,1,2,3$	$x^2 - x - 1 = 0$ $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
$m = r = 1$	Lucas dizisi	$g_0 = 2,\ g_1 = 1$	$g_{n+2} = g_{n+1} + g_n$	$2,1,3,4,7$	$x^2 - x - 1 = 0$ $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
$m = 2, r = 1$	Pell dizisi	$g_0 = 0, g_1 = 1$	$g_{n+2} = 2g_{n+1} + g_n$	$0,1,2,5,12$	$x^2 - 2x - 1 = 0$ $1\pm\sqrt{2}$
$m = 1, r = 2$	Jacobsthal dizisi	$g_0 = 0, g_1 = 1$	$g_{n+2} = g_{n+1} + 2g_n$	$0,1,1,3,5$	$x^2 - x - 2 = 0$ 2 ve -1

$\{f_n\}_{n\geq 0}$, $\{l_n\}_{n\geq 0}$, $\{p_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{j_n\}_{n\geq 0}$ dizileri sırasıyla Fibonacci, Lucas, Pell ve Jacobsthal sayı dizileri olmak üzere Binet ve benzeri formülleri, üreteç ve üstel üreteç fonksiyonları Tablo 3.2 de verilmektedir:

Tablo 3.2. Fibonacci, Lucas, Pell ve Jacobsthal dizileri ile ilgili formüller ve fonksiyonlar

Dizinin isimleri	Binet ve benzeri formülleri	Üreteç fonksiyonları	Üstel üreteç fonksiyonları
Fibonacci dizisi	$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$	$\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} x^n = \frac{e^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x} - e^{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x}}{\sqrt{5}}$
Lucas dizisi	$l_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} l_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_n}{n!} x^n = e^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x} + e^{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x}$
Pell dizisi	$p_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$	$\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \frac{x}{1-2x-x^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{n!} x^n = \frac{e^{(1+\sqrt{2})x} - e^{(1-\sqrt{2})x}}{2\sqrt{2}}$
Jacobsthal dizisi	$j_n = \frac{(2)^n - (-1)^n}{3}$	$\sum_{n=0}^{\infty} j_n x^n = \frac{x}{1-x-2x^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{j_n}{n!} x^n = \frac{e^{2x} - e^{(-1)x}}{3}$

3.1.2. Üçüncü Mertebeden Yineleme Bağıntılı Özel Sayı Dizileri

Bu kısımda, üçüncü mertebeden yineleme bağıntısına sahip Tribonacci, Narayana, Perrin ve Padovan dizileri hakkında bazı bilgilere yer verilmiştir.

Tanım 3.1.2.1. Başlangıç koşulları $T_0 = 0,\ T_1 = 1$ ve $T_2 = 1$ olan

$$T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$$

yineleme bağıntısını sağlayan $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reel sayı dizisine *Tribonacci sayı dizisi* denir (Feinberg, 1963). Bu dizinin ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir:

$$T_0 = 0,\ T_1 = 1,\ T_2 = 1,\ T_3 = 2,\ T_4 = 4,\ T_5 = 7,\ T_6 = 13,\ T_7 = 24,\ T_8 = 44,\ T_9 = 81.$$

Aşağıda $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin genel terimleri arasındaki bazı bağıntılar sunulmaktadır:

1. Kökleri υ, ω ve ξ olan $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denklemine sahip Tribonacci sayı dizisinin genel çözümü **(**Spickerman, 1982**)**:

$$T_n = \frac{\upsilon^{n+2}}{(\upsilon-\omega)(\upsilon-\xi)} + \frac{\omega^{n+2}}{(\omega-\upsilon)(\omega-\xi)} + \frac{\xi^{n+2}}{(\xi-\upsilon)(\xi-\omega)}.$$

2. Üreteç fonksiyonu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2-x^3}.$$

3. Üstel üreteç fonksiyonu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n}{n!} x^n = \frac{\upsilon^2 e^{\upsilon x}}{(\upsilon-\omega)(\upsilon-\xi)} + \frac{\omega^2 e^{\omega x}}{(\omega-\upsilon)(\omega-\xi)} + \frac{\xi^2 e^{\xi x}}{(\xi-\upsilon)(\xi-\omega)}.$$

Tanım 3.1.2.2. Başlangıç koşulları $N_0 = 0,\ N_1 = 1$ ve $N_2 = 1$ olan

$$N_{n+3} = N_{n+2} + N_n$$

yineleme bağıntısını sağlayan $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reel sayı dizisine *Narayana sayı dizisi* denir (Allouche ve Johnson, 1996). Bu dizinin ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir:

$$N_0 = 0,\ N_1 = 1,\ N_2 = 1,\ N_3 = 1,\ N_4 = 2,\ N_5 = 3,\ N_6 = 4,\ N_7 = 6,\ N_8 = 9,\ N_9 = 13.$$

Aşağıda $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin genel terimleri arasındaki bazı bağıntılar sunulmaktadır.

1. Kökleri η, ι ve κ olan $x^3 - x^2 - 1 = 0$ karakteristik denklemine sahip Narayana sayı dizisinin genel çözümü (Ramírez ve Sirvent, 2015):

$$N_n = \frac{\eta^{n+1}}{(\eta-\iota)(\eta-\kappa)} + \frac{\iota^{n+1}}{(\iota-\eta)(\iota-\kappa)} + \frac{\kappa^{n+1}}{(\kappa-\eta)(\kappa-\iota)}.$$

2. Üreteç fonksiyonu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_n x^n = \frac{x}{1-x-x^3}.$$

3. Üstel üreteç fonksiyonu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{N_n}{n!} x^n = \frac{\eta e^{\eta x}}{(\eta-\iota)(\eta-\kappa)} + \frac{\iota e^{\iota x}}{(\iota-\eta)(\iota-\kappa)} + \frac{\kappa e^{\kappa x}}{(\kappa-\eta)(\kappa-\iota)}.$$

Tanım 3.1.2.3. Başlangıç koşulları $\mathrm{Pr}_0 = 3,\ \mathrm{Pr}_1 = 0$ ve $\mathrm{Pr}_2 = 2$ olan

$$\mathrm{Pr}_{n+3} = \mathrm{Pr}_{n+1} + \mathrm{Pr}_n$$

yineleme bağıntısını sağlayan $\{\mathrm{Pr}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reel sayı dizisine *Perrin sayı dizisi* denir (Lucas, 1876; Perrin, 1899; Stewart, 1996). Bu dizinin ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir:

$\mathrm{Pr}_0 = 3,\ \mathrm{Pr}_1 = 0,\ \mathrm{Pr}_2 = 2,\ \mathrm{Pr}_3 = 3,\ \mathrm{Pr}_4 = 2,\ \mathrm{Pr}_5 = 5,\ \mathrm{Pr}_6 = 5,\ \mathrm{Pr}_7 = 7,\ \mathrm{Pr}_8 = 10,\ \mathrm{Pr}_9 = 12.$

Aşağıda $\{\mathrm{Pr}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin genel terimleri arasındaki bazı bağıntılar sunulmaktadır.

1. Kökleri σ, ς ve τ olan $x^3 - x - 1 = 0$ karakteristik denklemine sahip Perrin sayı dizisinin genel çözümü:

$$\mathrm{Pr}_n = \sigma^n + \varsigma^n + \tau^n .$$

2. Üreteç fonksiyonu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Pr}_n\, x^n = \frac{3 - x^2}{1 - x^2 - x^3} .$$

3. Üstel üreteç fonksiyonu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{Pr}_n}{n!} x^n = e^{\sigma x} + e^{\varsigma x} + e^{\tau x} .$$

Çalışmanın ana başlığını oluşturan ve genelleştirmelerini oluşturacağımız Padovan sayı dizisinin tanımından ve bazı gerekli görülen özdeşliklerinden bahsetmeden önce dizinin neden Padovan ismini aldığı ve kimler tarafından ortaya atıldığından kısa bir şekilde bahsedelim.

Mimarlık ve matematik üzerine çalışan İtalyan mimar Richard Padovan (1935-), Van der Laan'ın "De Architectonische ruimte" adlı kitabını inceledi, Hans van der Laan'ın eserlerine hayran oldu ve Van der Laan hakkında yazdığı kitabında Padovan sayı dizisini tanımladı. Padovan'ın diziyi Van der Laan'a atfetmesine rağmen, Stewart tarafından Padovan adını almıştır. Bazı kaynaklarda Padovan dizisi ilk olarak 1924'te Fransız mimarlık öğrencisi Cordonnier (1907-1977) tarafından keşfedildiği ifade ediliyor. Aynı zamanda Cordonnier dizisi olarak da bilinen bu sayılar hakkında, daha spesifik olarak plastik sayı (radyan sayı) üzerine bazı çalışmalar geliştirmiştir (Shannon vd., 2006; Vieira vd., 2020).

Tanım 3.1.2.4. Başlangıç koşulları $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ olan

$$P_{n+3} = P_{n+1} + P_n \tag{3.1}$$

yineleme bağıntısını sağlayan $\{P_n\}_{n\geq 0}$ reel dizisine *Padovan sayı dizisi* denir (Stewart, 1996). Burada, n. Padovan sayısı P_n ile gösterilir. Bu dizinin ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir (Pol, 2007):

$P_0 = 1,\ P_1 = 1,\ P_2 = 1,\ P_3 = 2,\ P_4 = 2,\ P_5 = 3,\ P_6 = 4,\ P_7 = 5,\ P_8 = 7,\ P_9 = 9,\ P_{10} = 12,\ P_{11} = 16.$

Padovan sayı dizisi, yeniden düzenlenmiş yineleme bağıntısı kullanılarak negatif indis n'ye de aşağıdaki gibi genişletilebilir:

$$P_n = P_{n+3} - P_{n+1}$$

yineleme bağıntısının ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir (Yılmaz ve Taskara, 2014):

$$P_{-11} = -2,\ P_{-10} = 2,\ P_{-9} = -1,\ P_{-8} = 0,\ P_{-7} = 1,\ P_{-6} = -1,\ P_{-5} = 1,\ P_{-4} = 0,\ P_{-3} = 0,\ P_{-2} = 1,\ P_{-1} = 0.$$

(3.1) yineleme bağıntısına (fark denklemine) $P_n = x^n$ dönüşümü uygulanırsa

$$x^{n+3} - x^{n+1} - x^n = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafını x^n ile bölünürse

$$x^3 - x - 1 = 0 \tag{3.2}$$

karakteristik denklemine ulaşılır. (3.2) denkleminin kökleri

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}} \approx 1,324718, \\
r_2 &= -\sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{144}} - \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{144}} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}} - \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}}\right), \\
r_3 &= -\sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{144}} - \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{144}} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}} - \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}}\right),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

olmak üzere r_1 reel kökü plastik sayıdır ve p ile gösterilir. Bu sayı plastik sabit, plastik oran, platin sayısı veya minimum pisot sayısı olarak da bilinir. Plastik sabitin kısa bir tarihçesi ve elde edilişi hakkındaki bilgi şu şekildedir:

1928'de Van der Laan, mimari çalışmalarını bırakıp acemi bir keşiş olduktan kısa bir süre sonra, yeni ve benzersiz bir mimari oran sistemi keşfetti. Plastik sayısı olarak adlandırdığı bu oran tek bir irrasyonel değere dayanmaktadır. Bu sayı ilk olarak 1924'te Cordonnier tarafından incelenmiştir. Ancak, üç boyutlu nesneler arasındaki boyut farklılıklarının insan algısıyla nasıl ilişkili olduğunu açıklayan ve keşfini (mimari) tasarımda sergileyen ilk kişi Hans van der Laan'dı. Ana önermesi, plastik sabitin gerçekten estetik olduğuydu (Marohnić ve Strmečki, 2012).

Bilindiği üzere Fibonacci sayı dizisinde ardışık iki değerin oranı, değerler büyüdükçe altın orana yakınsar. Benzer şekilde Padovan sayı dizisinde ardışık iki değerin oranı değerler büyüdükçe plastik sabite yaklaşır. Tablo 3.3'te n nin ilk yirmi değeri için P_{n+1}/P_n oranları gösterilmektedir. n büyüdükçe, P_{n+1}/P_n 'nin plastik sabite $p \approx 1.324$ yaklaştığı fark edilir:

Tablo 3.3. Ardışık Padovan sayılarının ilk birkaç oranı

n	P_{n+1}/P_n	n	P_{n+1}/P_n
0	$1/1 \approx 1,000000$	10	$16/12 \approx 1,333333$
1	$1/1 \approx 1,000000$	11	$21/16 \approx 1,312500$
2	$2/1 \approx 2,000000$	12	$28/21 \approx 1,333333$
3	$2/2 \approx 1,000000$	13	$37/28 \approx 1,321428$
4	$3/2 \approx 1,500000$	14	$49/37 \approx 1,324324$
5	$4/3 \approx 1,333333$	15	$65/49 \approx 1,326530$
6	$5/4 \approx 1,250000$	16	$86/65 \approx 1,323076$
7	$7/5 \approx 1,400000$	17	$114/86 \approx 1,325581$
8	$9/7 \approx 1,285714$	18	$151/114 \approx 1,324561$
9	$12/9 \approx 1,333333$	19	$200/151 \approx 1,324503$

Literatürde bilindiği üzere,

$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} \approx 1.324717957244... \tag{3.4}$$

dir. (3.1) ve (3.4) eşitliklerine göre

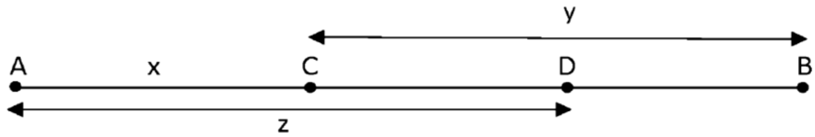
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n-1}}{P_n} + \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n-2}}{P_n} \\
&= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_n}{P_{n-1}}} + \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_n}{P_{n-2}}} \\
&= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_n}{P_{n-1}}} + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_{n-2}}{P_{n-3}}}}
\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$p = \frac{1}{p} + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{p}}$$

elde edilir (de Spinadel ve Buitrago, 2009; Alsina Català, 2007).

Plastik sabitin bazı geometrik yorumları aşağıda verilmiştir:



Şekil 3.1. Bir doğru üzerinde altın oran ve plastik sabit

Kabul edelim ki $|AB| = 1$ olsun. Bilindiği üzere AC ve BC olmak üzere iki bölüme ayrıldığında

$$\varphi = \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

orantısı altın oran verir. Benzer bir yöntemle, AB doğrusunun BC kısmı D noktasından ayrıldığında üç kısım elde edilir. $|AC| = x$, $|CB| = y$ ve $|AD| = z$ olmak üzere

$$p = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|CB|} = \frac{|CB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|BD|}$$

orantısı plastik sabiti verir. Buradan,

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|CB|} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{z}{y} \Rightarrow y = z^2$$

ve

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|CB|}{|AC|} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{y}{x} \Rightarrow zy = x$$

eşitlikleri kullanılarak $zy = x \Rightarrow z^3 = x$ elde edilir. Ayrıca,

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|CD|}{|BD|} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{z-x}{1-z} \Rightarrow 1-z = z^2 - zx$$

eşitliğinden

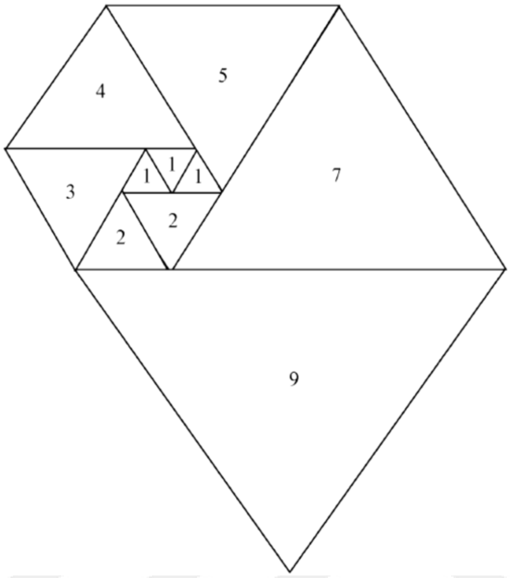
$$\begin{aligned} 1-z = z^2 - zx &\Rightarrow 1-z = z^2 - zz^3 \\ &\Rightarrow 1-z = z^2 - z^4 \\ &\Rightarrow z^4 - z^2 - z + 1 = 0 \\ &\Rightarrow (z-1)(1-z^2-z^3) = 0 \end{aligned}$$

$z \neq 1$ olduğundan $1 - z^2 - z^3 = 0$ dır. Böylece,

$$\left(\frac{1}{z}\right)^3 - \frac{1}{z} - 1 = 0 \Rightarrow p^3 - p - 1 = 0$$

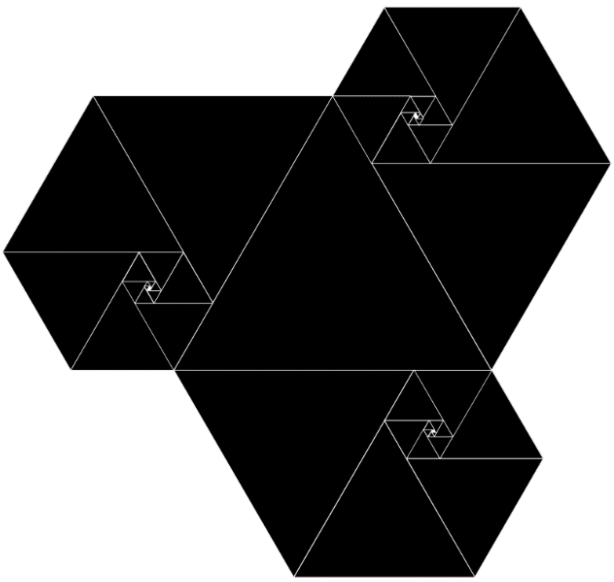
olacak şekilde Padovan sayı dizisinin karakteristik denklemi elde edilir (Marohnić ve Strmečki, 2012).

Kenar uzunlukları Padovan sayıları olan eşkenar üçgenlerin spiral olarak saat yönünün tersine kenarlarının birbiri ile çakışması ile oluşan şekil aşağıdaki gibidir (de Spinadel ve Buitrago, 2009):



Şekil 3.2. Kenar uzunlukları Padovan sayıları olan eşkenar üçgenlerin spiral formu 1

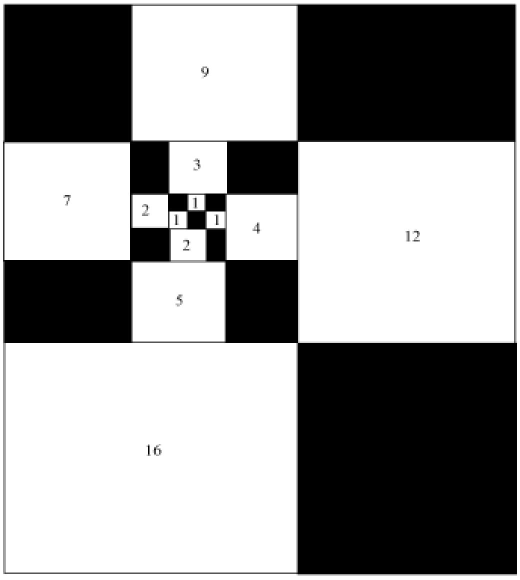
Farklı temsili aşağıdaki gibi gösterilir:



Şekil 3.3. Kenar uzunlukları Padovan sayıları olan eşkenar üçgenlerin spiral formu 2*

* *Şekil "Wikipedia, özgür ansiklopedi" den alınmıştır.*

Bu şekillere Padovan üçgenleri denir (de Spinadel ve Buitrago, 2009). Kenar uzunlukları Padovan sayıları olan karelerin belirli bir düzen içinde saat yönünün tersine yan yana getirilerek oluşturulan şekil aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.4. Kenar uzunlukları Padovan sayıları olan karelerin spiral formu*

Şimdi de Padovan sayı dizisinin bazı özdeşliklerinden bahsedelim. Padovan sayı dizisinin (3.2) karakteristik denklemin kökleri r_1, r_2 ve r_3 arasındaki ilişkiler şu şekildedir:

$$r_1 + r_2 + r_3 = 0,$$
$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = -1,$$
$$r_1 r_2 r_3 = 1.$$

(3.2) karakteristik denklemine sahip Padovan sayı dizisinin genel çözümü başlangıç koşulların durumuna göre farklılık gösterebilir:

Eğer başlangıç koşulları $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ olarak kabul edilirse

$$p_1 = \frac{(r_2 - 1)(r_3 - 1)}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)}, \quad p_2 = \frac{(r_1 - 1)(r_3 - 1)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)} \text{ ve } p_3 = \frac{(r_1 - 1)(r_2 - 1)}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)} \tag{3.5}$$

olmak üzere genel çözümü

$$P_n = p_1 r_1^n + p_2 r_2^n + p_3 r_3^n \tag{3.6}$$

şeklindedir.

* *Şekil "Wikipedia, özgür ansiklopedi" den alınmıştır.*

Eğer başlangıç koşulları $P_0 = 1,\ P_1 = 0$ ve $P_2 = 1$ olarak alınırsa

$$q_1 = \frac{r_2 r_3 + 1}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)},\quad q_2 = \frac{r_1 r_3 + 1}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)} \text{ ve } q_3 = \frac{r_1 r_2 + 1}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)}$$

olmak üzere genel çözümü

$$P_n = q_1 r_1^n + q_2 r_2^n + q_3 r_3^n \tag{3.7}$$

şeklindedir.

Eğer başlangıç koşulları $P_0 = 0,\ P_1 = 0$ ve $P_2 = 1$ olarak alınırsa

$$z_1 = \frac{1}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)},\quad z_2 = \frac{1}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)} \text{ ve } z_3 = \frac{1}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)}$$

olmak üzere genel çözümü

$$P_n = z_1 r_1^n + z_2 r_2^n + z_3 r_3^n \tag{3.8}$$

şeklindedir.

Başlangıç koşulları $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ olan Padovan sayı dizisi ile ilgili bazı özdeşlikler [46,47]:

1. Üreteç fonksiyonu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n = \frac{1+x}{1-x^2-x^3}$$

2. Üstel üreteç fonksiyonu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{n!} x^n = p_1 e^{r_1 x} + p_2 e^{r_2 x} + p_3 e^{r_3 x}$$

3. Seri açılımı:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{x^n} = \frac{x^2(x+1)}{x^3-x-1}$$

4. Binom toplamı:

$$\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} P_n = P_{3m}$$

5. Toplam formülü:

$$\sum_{n=0}^{m} P_n = P_{m+5} - 2$$

6. Başlangıç koşulları $P_0 = 1,\ P_1 = 0$ ve $P_2 = 1$ göre belirlenmiş Mp matrisi (Yılmaz and Taskara, 2014):

$$Mp = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere Mp matrisinin $n.$ kuvveti

$$Mp_n = \begin{bmatrix} P_{n-3} & P_{n-1} & P_{n-2} \\ P_{n-2} & P_n & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_{n+1} & P_n \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

şeklindedir.

7. Başlangıç koşulları $P_0 = 1,\ P_1 = 0$ ve $P_2 = 1$ göre belirlenmiş Mp_n matrisin tersi (Yılmaz and Taskara, 2014):

$$Mp_n^{-1} = \begin{bmatrix} P_{-n-3} & P_{-n-1} & P_{-n-2} \\ P_{-n-2} & P_{-n} & P_{-n-1} \\ P_{-n-1} & P_{-n+1} & P_{-n} \end{bmatrix}$$

8. $P_n = P_{n+5} - P_{n+4}$

9. $P_{-n-3} = P_n^2 - P_{n+1}P_{n-1}$

10. $P_n = P_{m-1}P_{n-m} + P_{m+1}P_{n-m+1} + P_m P_{n-m+2}$

11. $P_{n-3}P_{-n-3} + P_{n-1}P_{-n-2} + P_{n-2}P_{-n-1} = 1$

12. Mp_n matrisinin determinantı $|Mp_n| = 1$ dir.

3.1.3. Binom Katsayılarının Toplamları ile İlişkili Özel Sayı Dizileri

Binom katsayılarını içeren üçgen şeklinde oluşturulan diziye Pascal üçgeni denir. İlk olarak Ömer Hayyam tarafından bulunmasına rağmen Fransız matematikçi Blaise Pascal'ın soyadıyla anılır. Bir düzen içerisinde oluşturulan Pascal üçgeni aşağıdaki şekilde verilmiştir (Hoffman, 1974).

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 \\
 & & & & & & & & \vdots & & & & & & & &
\end{array}
$$

Şekil 3.5. Pascal üçgeni

Olasılık kuramında da kullanılan bu üçgen istatistik, biyoloji, modern fizik gibi bilimin birçok alanlarında da kullanılır. Matematikte sıklıkla görülen Binom katsayıları iki sayının toplamının kuvvetlerinin açılımında sistematik bir şekilde bulunur. İlk olarak Binom katsayısı, on altıncı yüzyılın Alman matematikçisi Michel Stifel (1486-1567) tarafından n ve k negatif olmayan tam sayıları $0 \leq k \leq n$ olmak üzere binom katsayısını

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

olarak tanımlamıştır. Eğer $k > n$ ise $\binom{n}{k}$, 0 olarak kabul edilir. Böylece,

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$

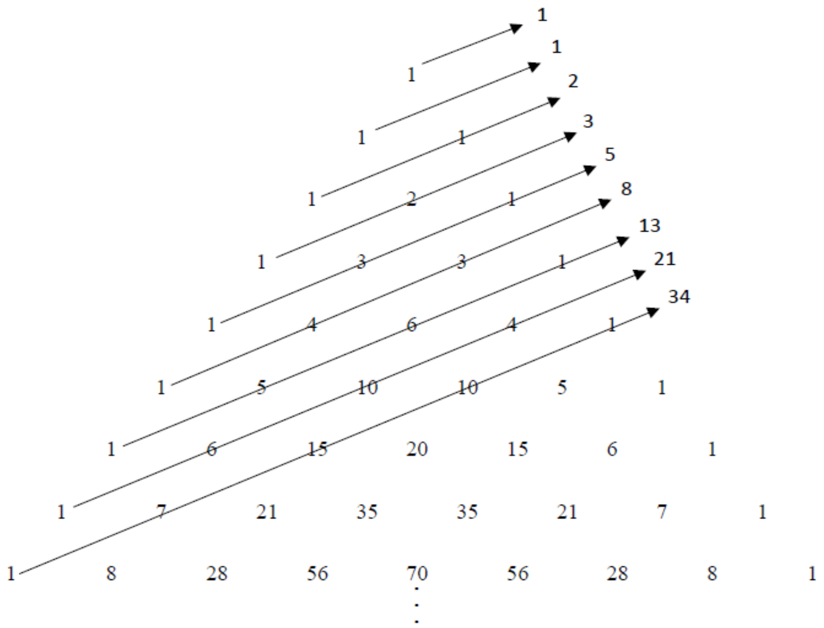
özdeşlikleri sağlanır (Woods, 1979).

Pascal kuralındaki binom katsayılarıyla ilişkili yapı

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \tag{3.10}$$

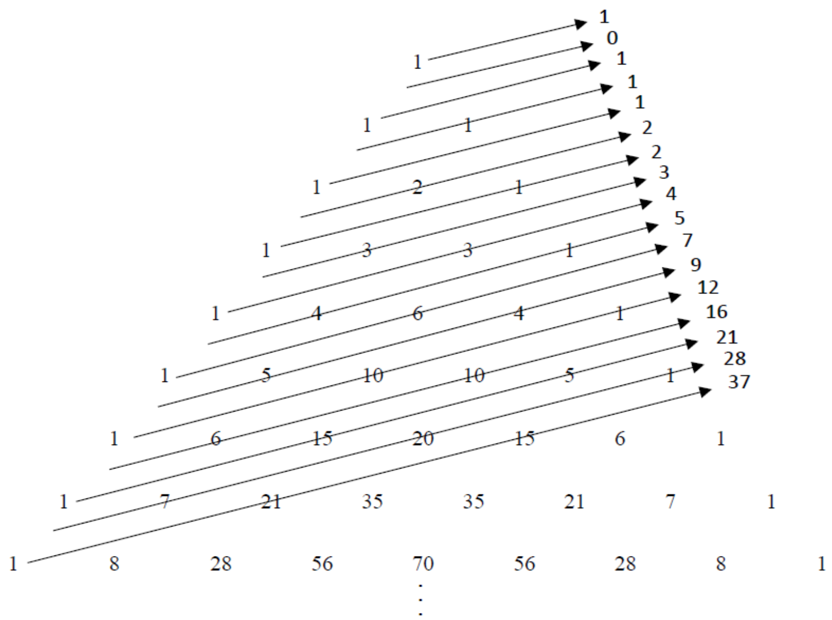
şeklindedir.

Şekil 3.5’deki Pascal üçgenin sol taraftaki 1 değerlerinden başlayarak Şekil 3.6’daki gibi doğrular çizilirse doğruların üzerinden geçtiği değerlerin toplamı Fibonacci sayılarını verdiği görülmektedir (Anatriello ve Vincenzi, 2020):



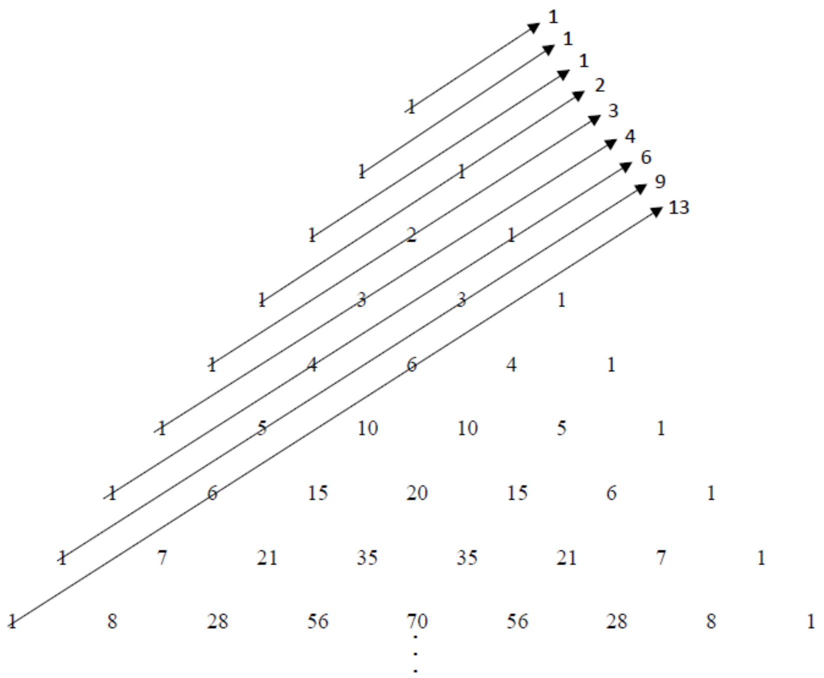
Şekil 3.6. Pascal üçgeni üzerinde Fibonacci sayılarının gösterimi

Ayrıca, Pascal üçgeninde, Fibonacci sayılarını elde etmek için çizilen doğrulara benzer doğrular Şekil 3.7’deki gibi çizilirse doğruların üzerinden geçtiği değerlerin toplamı Padovan sayılarını verdiği gösterilmektedir (Anatriello ve Vincenzi, 2020):



Şekil 3.7. Pascal üçgeni üzerinde Padovan sayılarının gösterimi

Narayana sayılarının da Pascal üçgeninden elde edildiği Şekil 3.8 de görülmektedir:



Şekil 3.8. Pascal üçgeni üzerinde Narayana sayılarının gösterimi

Yukarıdaki üç şekilde de görüldüğü üzere Fibonacci, Padovan ve Narayana sayılarını binom katsayıları kullanarak elde edilmektedir. Binom katsayısını kullanarak bu sayı dizilerinin terimlerini veren formüller sırasıyla aşağıdaki gibidir (Lucas, 1891):

$$F_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-k-1}{k},$$

$$P_{n-2} = \sum_{k=\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{k}{n-2k},$$

$$N_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor} \binom{n-2k-1}{k}.$$

Yukarıdaki formüller tek türlü değildir. Fibonacci, Padovan ve Narayana sayılarını veren farklı şekilde formüller türetilebilir.

3.2. Bernoulli Sayıları ve Polinomları

Bernoulli sayıları eski bir problemi çözme sürecinde keşfedildi. Hem Jakob Bernoulli hem de Seki Takakazu, *n* ve *m* pozitif tamsayıları için

$$T_m(n) = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m$$

olarak tanımlanan tamsayı kuvvetlerinin toplamları için genel bir formül bulmaya çalışırken Bernoulli sayılarını veren bir formül türettiler.

Jakob Bernoulli'nin Bernoulli sayılarını bulma yöntemi, Seki Takakazu'nun yöntemine göre daha kullanışlı olduğu için Bernoulli sayılarını veren formül Jakob Bernoulli'nin yöntemi kullanılarak türetilmektedir. Bernoulli, $T_m(n)$ formüllerinin, $n-1$ tamsayısına kadar olan ilk beş toplamını aşağıdaki gibi listelemektedir (Laura, 1996).

$$\begin{aligned}
T_1(n-1) &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{n(n-1)}{2},\\
T_2(n-1) &= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6},\\
T_3(n-1) &= \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2(n-1)^2}{4},\\
T_4(n-1) &= \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30},\\
T_5(n-1) &= \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 = \frac{n^2(n-1)^2(2n^2-2n-1)}{12}.
\end{aligned}$$

Yukarıdaki liste şu şekilde de ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
T_1(n-1) &= \frac{1}{2}\left[\binom{2}{0}n^2 - \binom{2}{1}\frac{1}{2}n\right],\\
T_2(n-1) &= \frac{1}{3}\left[\binom{3}{0}n^3 - \binom{3}{1}\frac{1}{2}n^2 + \binom{3}{2}\frac{1}{6}n\right],\\
T_3(n-1) &= \frac{1}{4}\left[\binom{4}{0}n^4 - \binom{4}{1}\frac{1}{2}n^3 + \binom{4}{2}\frac{1}{6}n^2 + \binom{4}{3}0n\right],\\
T_4(n-1) &= \frac{1}{5}\left[\binom{5}{0}n^5 - \binom{5}{1}\frac{1}{2}n^4 + \binom{5}{2}\frac{1}{6}n^3 + \binom{5}{3}0n^2 - \binom{5}{4}\frac{1}{30}n\right],\\
T_5(n-1) &= \frac{1}{6}\left[\binom{6}{0}n^6 - \binom{6}{1}\frac{1}{2}n^5 + \binom{6}{2}\frac{1}{6}n^4 + \binom{6}{3}0n^3 - \binom{6}{4}\frac{1}{30}n^2 + \binom{6}{5}0n\right].
\end{aligned}$$

Böylece, tüm eşitlikleri birbirine bağlayan aşağıdaki model oluşturulur:

$$T_m(n-1) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m-k+1}.$$

Burada, en son oluşturulan listede görüleceği üzere her bir eşitliğin n değişkeni ile binom değeri arasında kalan B_k katsayılarına *Bernoulli sayıları* denir (Larson, 2019). Bir başka deyişle, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $B_0 = 1$ olmak üzere

$$B_r = -\frac{1}{(r+1)} \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r+1}{i} B_i$$

eşitliği ile elde edilen sayılara Bernoulli sayıları denir (Lalin, 2005).

Bernoulli sayıları üstel üreteç fonksiyonundan yararlanarak da tanımlanabilir. $B_n(x)$ Bernoulli polinomları üstel üreteç fonksiyonu yardımıyla

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!},\ n > 0$$

biçiminde tanımlanır (Al-Salam, 1958). Bernoulli sayıları, Bernoulli polinomlarının $x = 0$ daki değeridir. Yani, $B_n = B_n(0)$ dır. Bernoulli sayıları üstel üreteç fonksiyonu yardımıyla

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!},\ \left(|t| < 2\pi\right)$$

ile tanımlanır. Başka bir deyişle, $B_n(x)$ Bernoulli polinomları, B_r Bernoulli sayıları olmak üzere

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} B_r x^{n-r} = B_n(x)$$

şeklinde tanımlanır (Carlitz, 1968). İlk birkaç Bernoulli polinomu aşağıdaki gibidir:

$$B_0(x) = 1,$$
$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$
$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$
$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$
$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},$$
$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x.$$

B_n Bernoulli sayıları, $B_0 = 1$ olmak üzere

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} B_r = B_n, \quad (n > 1)$$

biçiminde tanımlanır. İlk birkaç Bernoulli sayıları da aşağıdaki gibidir:

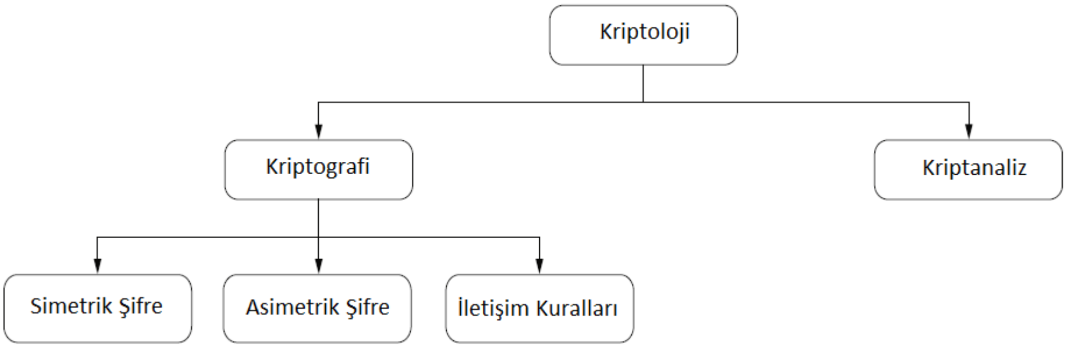
$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0.$$

Bernoulli sayıları ve polinomları aşağıdaki temel özellikleri sağlar:

- $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$,
- $\frac{d}{dx} B_n(x) = B_n^{'}(x) = n.B_{n-1}(x)$,
- $\sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} B_r(x) = nx^{n-1}, \ \ n \geq 1$,
- $\sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} B_r = 0, \ \ n \geq 2$.

3.3. Kriptografik Şifreleme Sistemleri ve Galois Cisimleri

Çalışmanın bu kısmında, genelleştirilmiş Padovan matrisini kullanarak oluşturulan yeni bir şifreleme sistemi için gerekli olan kriptografik şifreleme sistemleri hakkında bazı bilgilere yer verilmiştir.



Şekil 3.9. Kriptoloji Şeması

İlk fark ettiğimiz şey, en genel terimin kriptografi değil, kriptoloji olduğudur. *Kriptoloji,* kriptografi ve kriptanaliz olmak üzere iki ana kola ayrılır. *Kriptografi,* güvenli bir iletişim için bir mesajı, mesajın amaçlanan alıcısı dışında kimse tarafından anlaşılamayacak şekilde gizlemek için bir sistem geliştirme sürecine denir. Bu işlemi gerçekleştirmek için tasarlanmış yönteme *kripto sistem* veya *şifreleme algoritması* denir. *Kriptanaliz*, şifrelenmiş bilgilerin istenmeyen bir alıcısının şifrelemeyi kaldırmaya ve bilgiyi anlamaya çalışmasına denir ve başarılı bir kriptanaliz şifreyi kırma işlemi ile sonuçlanır. Kriptografi, kriptanaliz ve bunlar arasındaki etkileşimi içeren her şeyi kapsayan terime *kriptoloji* denir (Paar ve Pelzl, 2009).

Yukarıdaki şekilde de görüldüğü üzere kriptografi üç ana kola ayrılır. *Simetrik şifreleme*, iki tarafın gizli bir anahtarı paylaştıkları bir şifreleme ve şifre çözme yöntemidir. Uzun bir süre yalnızca simetrik şifreleme yöntemleri vardı. Simetrik şifreler, özellikle veri şifreleme ve mesajların bütünlük kontrolü için hala yaygın olarak kullanılmaktadır. Simetrik şifreleme, bir mesajın şifrelenmesi ve çözülmesin de aynı anahtarı kullanma prensibine sahiptir. Bu şifrelemenin avantajı hızı, dezavantajı ise ortak anahtarların belirlenmesi ve taraflara iletilmesinde karşılaşılan problemlerdir. Simetrik şifreleme içinde blok şifre sistemlerini ve akan şifre sistemlerini barındırmaktadır. Blok şifre sistemlerine örnek olarak Hill, AES, DES ve Gamallia gibi şifreleme sistemleri, akan şifre sistemlerine de RC4, A5/1, A5/2 gibi örnekler verilebilir. *Asimetrik şifreleme* (veya açık anahtarlı), simetrik şifrelemeden sonra ortaya atılan farklı bir şifreleme türüdür. Whitfield Diffie, Martin Hellman ve Ralph Merkle tarafından tanıtıldı. Asimetrik şifrelemede, bir kullanıcı simetrik şifrelemede olduğu gibi gizli bir anahtara sahip olmanın yanı sıra bir genel anahtara da sahiptir. Asimetrik şifreleme, dijital imzalar ve anahtar oluşturma gibi uygulamalarda ve ayrıca klasik veri şifreleme için kullanılabilir. İletişim kuralları, kabaca kriptografik sistemlerin uygulanmasıyla ilgilenir. Simetrik ve asimetrik sistemler, güvenli internet iletişimi gibi uygulamaların gerçekleştirilebileceği yapı taşları olarak görülebilir. Her web tarayıcısında kullanılan Aktarım Katmanı Güvenliği şeması, bir iletişim kuralı örneğidir.

Genelleştirilmiş Padovan matrisi ile oluşturulan şifreleme sistemi için gerekli olan Affine şifreleme sitemine giriş yapıyoruz.

3.3.1. Affine Şifreleme Sistemi

Öteleme şifreleme sisteminin genel bir hali olan Affine şifreleme sistemi şu şekilde ifade edilir:

$A=\{(a,b): a,b\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \text{ ve } (a,m)=1\}$ olsun. $m\in\mathbb{N}$ ve $X=Y=\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ olmak üzere $x\in X$, $y\in Y$ ve $e,d\in A$ için

$$E_e(x)=ax+b(\operatorname{mod} m) \text{ ve } D_d(y)=a^{-1}(y-b)(\operatorname{mod} m)$$

dir (Mollin, 2007).

Örnek 3.3.1.1. $m=26$ ve $X=Y=\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$ olsun. Affine şifreleme sistemi aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$E_e(x)=7x+5=y\in\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$$

ve

$$7^{-1}\equiv 15\left(\operatorname{mod} 26\right)$$

olacak şekilde

$$D_d\left(y\right)=15\left(y-5\right)=15y-23\in\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}=X$$

dır. Böylece göndermek istediğimiz $x=2$ mesajının düşman tarafından ele geçirilmemesi için

$$E_e(2)=7.2+5=19\in\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$$

şeklinde şifrelenerek mesaj düşmandan gizlenir. Alıcı mesajı $y=19$ olarak alır ve

$$D_d\left(19\right)=15\left(19-5\right)=2\in\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$$

yöntem ile şifreli mesaj çözülür (Mollin, 2007).

Genelleştirilmiş Padovan matrisi ile oluşturulan şifreleme sistemi bir blok şifreleme sistemine örnek gösterilebilir. Blok şifreleme sistemlerinin önemli bir örneği olan Hill şifreleme sisteminin işleyişi şu şekildedir:

3.3.2. Hill Şifreleme Sistemi

Hill şifreleme sistemi 1929 da Amerikalı matematikçi Hill tarafından sunuldu. Bu sistem şu şekilde ifade edilir:

$K=\left\{e\in M_{n\times n}\left(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\right)^n : e \text{ tersinir}\right\}$ olsun. $n,m\in\mathbb{N}$ sabiti için $P=C=\left(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\right)^n$ olarak ayarlansın. Bu takdirde, $x\in P$, $y\in C$ ve $e\in K$ olmak üzere

$$E_e(x)=xe \text{ ve } D_d(y)=ce^{-1}$$

dir (e tersinir olması için gerek ve yeter koşul $\left(\left|e\right|,m\right)=1$ olduğuna dikkat edelim) (Mollin, 2007).

Örnek 3.3.2.1. $A=\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$ tanımlı alfabenin düz metin harflerinin sayısal karşılıkları Tablo 3.4 te verilmektedir.

Tablo 3.4. Harflerin sayısal karşılıkları

Sayılar	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Harfler	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
Sayılar	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Harfler	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

$n=2$ ve $m=26$ olsun. Burada,

$K=\left\{e\in M_{2\times 2}\left(\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}\right)^2 : e \text{ tersinir}\right\}$ ve $P=C=\left(\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}\right)^2$ olsun. Eğer $e\in K$ ise bu takdirde $\left(|e|,26\right)=1$ dir. $|e|=9$ olacak şekilde $e=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ olsun.

Varsayalım ki şifrelenecek kelime *movie* olsun. İlk olarak yukarıdaki tablodan *movie* kelimesinin harflere karşılık gelen sayısal değerler alınır: 12, 14, 21, 8, 4. Sonra, 1x2 tipinde matrisler $x_1=(12,14)$, $x_2=(21,8)$ ve $x_3=(4,25)$ olarak bloklara ayrılır. Burada son çifti tamamlamak için sayısal eşdeğeri 25 olan *z* kullanılır. Bu durumda Hill şifreleme sisteminde tanımlanan şifreleme dönüşümü kullanılarak

$$E_e(x_1)=\begin{bmatrix}12 & 14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 6\\ 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24 & 12\end{bmatrix},$$

$$E_e(x_2)=\begin{bmatrix}21 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 6\\ 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19 & 10\end{bmatrix},$$

$$E_e(x_3)=\begin{bmatrix}4 & 25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 6\\ 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 19\end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece, şifrelenmiş sayısal değerlere karşılık gelen şifreli metin *xmtklt* olur. Şifreli metni göndermek için yukarıdaki tablo kullanılır. Şifre çözmenin nasıl çalıştığı aşağıda gösterilmektedir:

$$e^{-1}=\begin{bmatrix}15 & 8\\ 23 & 9\end{bmatrix}$$

hesaplanır. Sonra şifre çözme dönüşümünü aşağıdaki gibi şifreli metnin sayısal eşdeğerlerine uygulanır. $y_1=(24,12)$, $y_2=(19,10)$ ve $y_3=(11,19)$ olmak üzere

$$D_d(y_1) = \begin{bmatrix} 24 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 8 \\ 23 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 14 \end{bmatrix},$$

$$D_d(y_2) = \begin{bmatrix} 19 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 8 \\ 23 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 8 \end{bmatrix},$$

$$D_d(y_3) = \begin{bmatrix} 11 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 8 \\ 23 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 25 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Sayılara karşılık gelen harf eşdeğerleri, sonunda *z* harfini çıkardıktan sonra bize orijinal düz metin mesajı *movie* kelimesini geri vermektedir (Mollin, 2007).

3.3.3. Galois Cisimleri

Tezin son kısmında incelenecek şifreleme sistemi için gerekli ölçüde Galois cisimleri hakkında kısa bilgi verilecektir. Bu kısımda Galois cisim aritmetiğine bir giriş yapılmaktadır.

Dört temel aritmetik işlemin (yani toplama, çıkarma, çarpma, bölme) tek bir yapıda olması için, bir toplama ve bir çarpım grubu içeren bir kümeye ihtiyacımız var. Buna cisim diyoruz.
Yani**,** bir F cismi aşağıdaki özellikleri sağlayan elemanların bir kümesidir (Paar ve Pelzl, 2009):

1. F nin tüm elemanları “+” toplama işlemine göre bir değişmeli grup oluşturur ve etkisiz elemanı 0 dır.

2. F nin 0 hariç tüm elemanları “×” çarpma işlemine göre bir değişmeli grup oluşturur ve etkisiz elemanı 1 dir.

3. İki grup işlemi karşılaştırıldığında dağılma özelliğine sahiptir. Yani, her $a,b,c \in F$ için

$$a\left(b+c\right) = ab + ac$$

dir. Kriptografide, neredeyse her zaman sonlu sayıda elemana sahip, sonlu cisimler veya Galois cisimleri dediğimiz cisimler kullanılır. Cisimdeki elemanların sayısı, cismin mertebesi veya kardinalitesi olarak adlandırılır.

2^m elemanlı Galois cismini oluşturmak için, $GF(2^m)$ elemanlarını temsil etmemiz gerekmektedir. Ayrıca bu temsili kullanarak toplama, çıkarma, çarpma ve bölme (ters çevirme) gibi cisim işlemlerini nasıl gerçekleştirileceği belirtilmelidir. Cisim elemanlarının polinomları ve ilişkili aritmetiği şu şekilde temsil edilmektedir:

Katsayıları $GF(2) = \{0,1\}$ taban cisminden olan $GF(2^m)$ nin Galois cisminin herhangi bir polinom gösterimi

$$A(x)=a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0,\ a_i\in GF(2)=\{0,1\}$$

şeklinde derecesi en fazla $m-1$ olan polinomların aritmetiğine dayanır. Dijital formda m bitlik bir

$$A=\left(a_{m-1},a_{m-2},....,a_2,a_1,a_0\right)$$

vektörü olarak saklanabileceğini gözlemlemek önemlidir.

$GF(2^m)$ de toplama, çıkarma**,** çarpma ve çarpmaya göre tersi işlemleri aşağıda sırasıyla verilmektedir:

$A(x),B(x)\in GF(2^m)$ olsun. İki polinomun toplama ve çıkarma işlemi aşağıdaki şekilde hesaplanır (Paar ve Pelzl, 2009):

$$A(x)\pm B(x)=\sum_{n=0}^{m-1}(a_n\pm b_n)x^n,\ a_n\pm b_n\left(\mathrm{mod}\,2\right).$$

Diğer taraftan çarpma işlemi en çok $2m-2$ dereceli bir polinom vereceğinden m dereceden bir indirgenemez polinom modülüne göre indirgenir. Yani,

$A(x),B(x)\in GF(2^m)$ ve $P(x)=\sum_{n=0}^{m}p_nx^n,\ p_n\in GF(2)$ bir indirgenemez polinom olsun. $A(x)$ ve $B(x)$ polinomların çarpımı aşağıdaki şekilde gerçekleşir (Paar ve Pelzl, 2009):

$$A(x)B(x)\left(\mathrm{mod}\,P(x)\right).$$

Buradan şu söylenebilir. Bir $GF(2^m)$ Galois cismini oluşturmak için m dereceli indirgenemez bir polinoma ihtiyacımız var. Genellikle belirli bir m dereceli indirgenemez polinomdan birden fazla olduğundan bunlardan herhangi biri kullanılabilir ve $GF(2^m)$ cismini oluşturulabilir. Hangisinin seçildiği önemli değil. Herhangi biri seçilip tüm işlemlerde aynı indirgenemez polinom kullanılmalıdır. Tüm bu $GF(2^m)$ cisimler birbirine izomorfiktir. Ek 2 deki tabloda bazı indirgenemez polinomlar verilmektedir.

$GF(2^m)$ cismi üzerinde $P(x)$ indirgenemez polinomu ile $A(x)\in GF(2^m)$ sıfırdan farklı $A^{-1}(x)$ polinomunun tersi aşağıdaki gibi elde edilir (Paar ve Pelzl, 2009):

$$A^{-1}(x)A(x)\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,P(x)\right).$$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, ilk olarak Padovan sayı dizisinin karakteristik denkleminin bir reel kökü olan plastik sabitin bazı sonuçları incelenmiştir. Sonra, Padovan sayı dizisinin birçok genellemeleri keşfedilmiş ve bu genellemelerin karakteristik denklemlerine bağlı genel çözümleri, üreteç fonksiyonları, kısmi toplam formülleri ve çeşitli özdeşlikleri elde edilmiştir.

4.1. Plastik Sabit

Bu kısımda, önce plastik sabiti veren karakteristik denklemi kullanarak iç içe geçmiş kök genişlemesi ile Padovan sayıları arasında elde edilen bağıntı gösterilmektedir. Sonra, önceden belirlemiş bir fonksiyonun tersi ile türevini eşitlendiğinde elde edilen karakteristik denklemin köklerinden biri plastik sabiti verdiği kanıtlanmaktadır. Son olarak, geometrik şekiller ile plastik sabitin ilişkisi incelenmektedir (Dişkaya ve Menken, 2021).

4.1.1. İç İçe Geçmiş Kök Genişlemeleri ve Plastik Sabitin Sürekli Kesir Gösterimi

Plastik sabit değeri p'nin $x^3 = x+1$ kübik denkleminin bir reel kökü olduğu bilinmektedir. Bu denklemin tam olarak bir pozitif reel çözümü vardır, yani $x=\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ için

$$p=\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\ddots}}}}}}$$

şeklinde plastik sabitin iç içe geçmiş kare kök genişlemesi elde edilir. $x=\sqrt[3]{x+1}$ için

$$p=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\cdots}}}$$

şeklinde plastik sabitin iç içe geçmiş küp kök genişlemesi elde edilir. $x=\sqrt[4]{1+x+\frac{1}{x}}$ için

$$p=\sqrt[4]{1+\sqrt[4]{1+\sqrt[4]{1+\ddots+\frac{1}{\ddots}}+\frac{1}{\sqrt[4]{1+\ddots+\frac{1}{\ddots}}}}+\frac{1}{\sqrt[4]{1+\sqrt[4]{1+\ddots+\frac{1}{\ddots}}+\frac{1}{\sqrt[4]{1+\ddots+\frac{1}{\ddots}}}}}}$$

şeklinde plastik sabitin iç içe geçmiş dördüncü dereceden kök genişlemesi elde edilir. $x=\sqrt[5]{2+x+\frac{1}{x}}$ için

$$p=\sqrt[5]{2+\sqrt[5]{2+\sqrt[5]{2+\ddots+\frac{1}{\ddots}}+\frac{1}{\sqrt[5]{2+\ddots+\frac{1}{\ddots}}}}+\frac{1}{\sqrt[5]{2+\sqrt[5]{2+\ddots+\frac{1}{\ddots}}+\frac{1}{\sqrt[5]{2+\ddots+\frac{1}{\ddots}}}}}}$$

şeklinde plastik sabitin iç içe geçmiş beşinci dereceden kök genişlemesi elde edilir. Sonra sırasıyla

$$x=\sqrt[6]{2+2x+\frac{1}{x}},$$
$$x=\sqrt[7]{3+2x+\frac{2}{x}},$$
$$x=\sqrt[8]{4+3x+\frac{2}{x}},$$
$$x=\sqrt[9]{5+4x+\frac{3}{x}},$$

şekilde devam edilirse

$$x=\sqrt[n]{P_{n-2}+P_{n-3}x+\frac{P_{n-4}}{x}}$$

sonucuna varılır. Tümevarım yöntemi ile sonucun doğruluğunu kanıtlayalım. $n=k$ için $x^{k+1}=P_{k-2}x+P_{k-3}x^2+P_{k-4}$ doğru olsun. $n=k+1$ için $x^{k+2}=P_{k-1}x+P_{k-2}x^2+P_{k-3}$ olduğunu gösterelim.

$x^{k+1}=P_{k-2}x+P_{k-3}x^2+P_{k-4}$ eşitliğin her tarafı x ile çarpıldığın da

$$x^{k+2}=P_{k-2}x^2+P_{k-3}x^3+P_{k-4}x$$

elde edilir. Sonra, (3.1) eşitliği ve (3.2) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} x^{k+2} &= P_{k-2}x^2 + P_{k-3}x^3 + P_{k-4}x \\ &= P_{k-2}x^2 + P_{k-3}(x+1) + P_{k-4}x \\ &= P_{k-2}x^2 + \left(P_{k-3} + P_{k-4}\right)x + P_{k-3} \\ &= P_{k-1}x + P_{k-2}x^2 + P_{k-3} \end{aligned}$$

doğruluğu kanıtlanmış olur. Böylece aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$x = \sqrt[n]{P_{n-2} + P_{n-3}\sqrt[n]{P_{n-2} + P_{n-3}\cdot^{\cdot^{\cdot}} + \frac{P_{n-4}}{\ddots}} + \frac{P_{n-4}}{\sqrt[n]{P_{n-2} + P_{n-3}\cdot^{\cdot^{\cdot}} + \frac{P_{n-4}}{\ddots}}}}.$$

Plastik sabitin basit sürekli kesir genişlemesi şu şekildedir (Cloitre, 2002):

$$p = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

$x^3 = x+1$ pozitif reel kökü p plastik sabitin sürekli kesir genişlemesi [1, 3, 12, 1, 1, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 141, 80, 2, 5, 1, 2, 8, 2, 1, 1, 3, 1, 8, 2 1, 1, 14, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 10, 4, 40, 1, 1, 2, 4, 9, 1, 1, 3, 3, 3, 2, 1, 17, 7, 5, 1, ...] dir.

4.1.2. Gattei Benzeri Yöntem ile Plastik Sabit

Gattei, İngiltere Blackburn'deki Kraliçe Elizabeth'in Gramer okulundayken, reel değerli bir f fonksiyonunun tersini f^{-1} fonksiyonunu içeren bir problemle karşılaştı. Yanlışlıkla eksi işaretini düşürdü ve f fonksiyonun türevini aldı (Gattei, 1990). Böylece, $f(x) = Ax^n$ fonksiyonun türevini tersine eşitlediğinde n değerinin altın oranı verdiğini fark etti. Bu kısımda, benzer bir yöntem ile plastik sabitin elde edilişi gösterilmektedir.

Teorem 4.1.2.1. A sabit bir reel değer ve p plastik sabit olsun. Bu takdirde, $f(x) = Ax^{n^2}$ fonksiyonu, $f'(x) = \left(f^{-1}(x)\right)^n$ ise $n = p$ dir.

İspat.

$f'(x) = An^2x^{n^2-1}$ ve $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{x}{A}\right)^{\frac{1}{n^2}}$ olmak üzere $f'(x) = \left(f^{-1}(x)\right)^n$ ise

$$An^2x^{n^2-1} = \left(\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1}{n^2}}\right)^n \Rightarrow A^{n+1}n^{2n}x^{n^3-n-1} = 1$$

olur. Böylece, $n^3 - n - 1 = 0$ ve $A^{n+1}n^{2n} = 1$ dir. Bu takdirde, Padovan sayı dizisinin 3. dereceden karakteristik denklemin kökleri r_1, r_2 veya r_3 dür.

4.1.3. Bazı Geometrik Şekiller ile Plastik Sabit

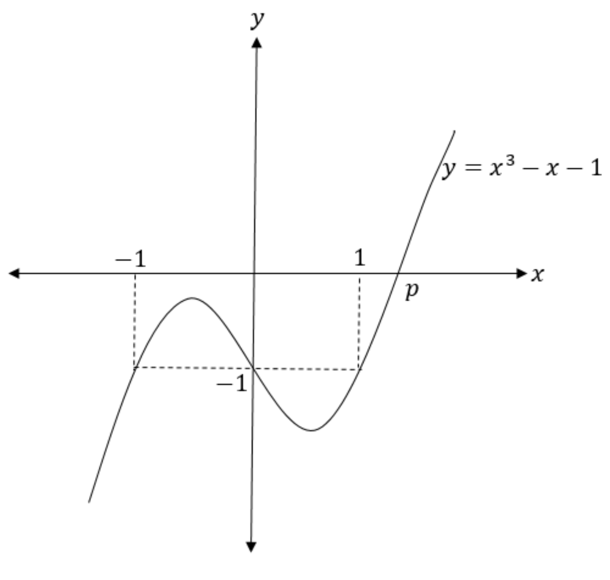
Bilindiği üzere $t^3 + mt + n = 0$ denklemin reel çözümünü bulmak için Cardano formülünü kullanarak,

$$t = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}}$$

değeri elde edilir. Bu takdirde, $m = n = -1$ olmak üzere Şekil 4.1'deki $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin çözümü x'in plastik sabit olan p reel değeri

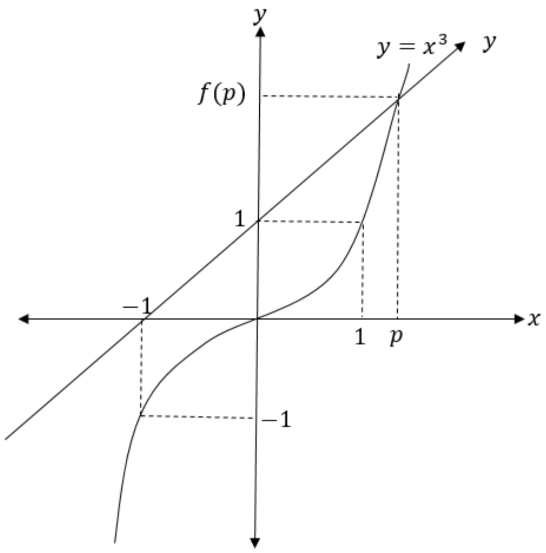
$$p = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}} \approx 1,324718$$

biçimindedir.



Şekil 4.1. Eğride plastik sabit

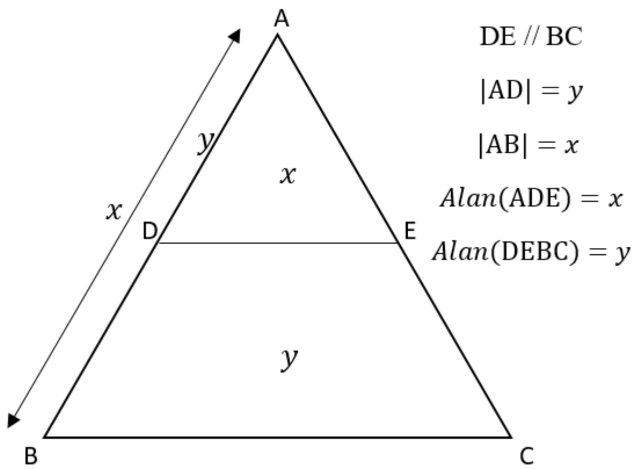
$y = x^3$ kübik ve $y = x + 1$ doğrusal fonksiyonların grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.2. Eğri ve doğrunun kesiştiği noktada plastik sabit

Bu eğrilerin kesiştiği noktanın apsisi plastik sabiti verir. Çünkü $x^3 - x - 1 = 0$ pozitif reel kökü plastik sabit p dir.

Şekil 4.3 teki ABC üçgenini göz önüne alalım. $DE // BC$ paralel çizgiler olsun. Üçgenlerin alanları, köşelerinin kareleriyle orantılı olduğu bilinmektedir. Aşağıdaki gibi bir üçgenin var olduğunu kabul edelim.



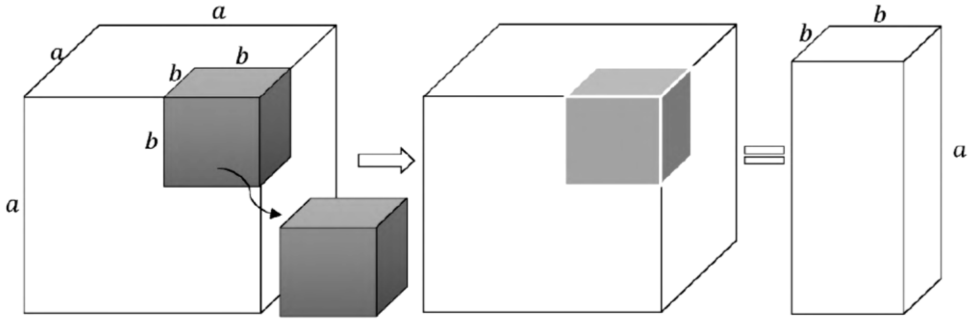
Şekil 4.3. Üçgende plastik sabit

Böylece,

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{x}{x+y} \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0$$

olacak şekilde $\dfrac{x}{y}$, $t^3 - t - 1 = 0$ kübik denkleminin plastik sabit köküdür.

Uzunluğu a birim olan bir küp prizması ele alalım. Bu küp prizmasının köşesinden kenar uzunluğu b birim olan bir küp prizmayı çıkaralım. Ortaya çıkan şeklin hacmi, aşağıdaki gibi yüksekliği a birim, tabanı b birim olan kare dik prizmanın hacmine eşit olsun.



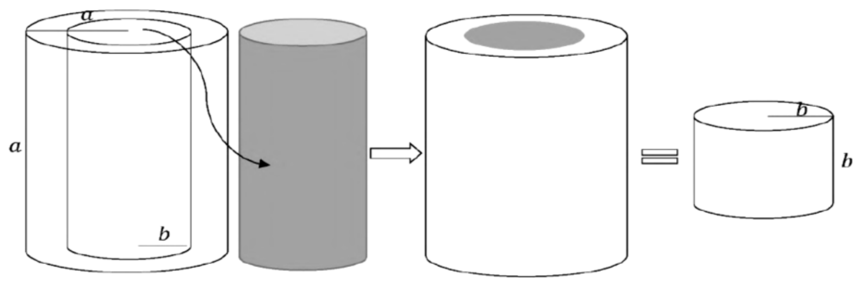
Şekil 4.4. Dikey prizmalarda plastik sabit

Böylece,

$$a^3 - b^3 = ab^2$$
$$a^3 - ab^2 - b^3 = 0$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\frac{a}{b} = p$ plastik sabiti verir.

Yarıçap ve yüksekliği a birim olan bir silindir ele alalım. Bu silindirin ortasından yarıçapı b birim ve yüksekliği a birim olan bir silindir çıkaralım. Elde edilen şeklin hacmi, aşağıdaki gibi yarıçap ve yükseklik b birim olan silindirin hacmine eşit olsun.



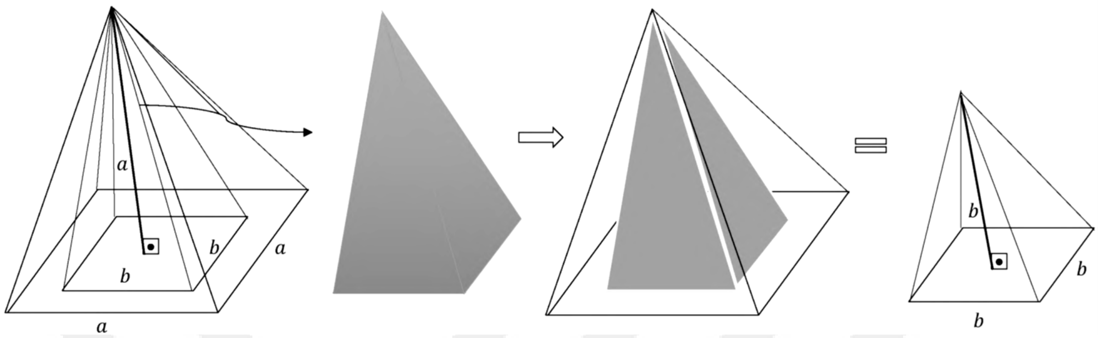
Şekil 4.5. Silindirlerde plastik sabit

Böylece,

$$a^3 - ab^2 = b^3$$
$$a^3 - ab^2 - b^3 = 0$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\dfrac{a}{b} = p$ plastik sabiti verir.

Taban kenarları ve yüksekliği a birim olan bir piramit ele alalım. Bu piramittin ortasından taban kenarları b birim ve yüksekliği a birim olan bir piramit çıkaralım. Ortaya çıkan şeklin hacmi, aşağıdaki gibi taban kenarları ve yüksekliği b birim olan piramidin hacmine eşit olsun.



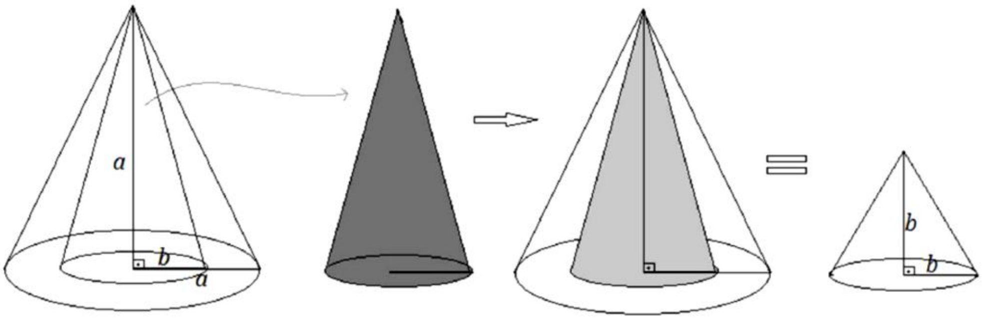
Şekil 4.6. Piramitlerde plastik sabit

Böylece,

$$\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}ab^2 = \frac{1}{3}b^3$$
$$a^3 - ab^2 - b^3 = 0$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\dfrac{a}{b} = p$ plastik sabiti verir.

Yarıçap ve yükseklik a birim olan bir koni ele alalım. Bu koninin ortasından yarıçapı b birim ve yüksekliği a birim olan bir koniyi çıkaralım. Elde edilen şeklin hacmi, aşağıdaki gibi yarıçapı ve yüksekliği b birim olan koninin hacmine eşit olsun.



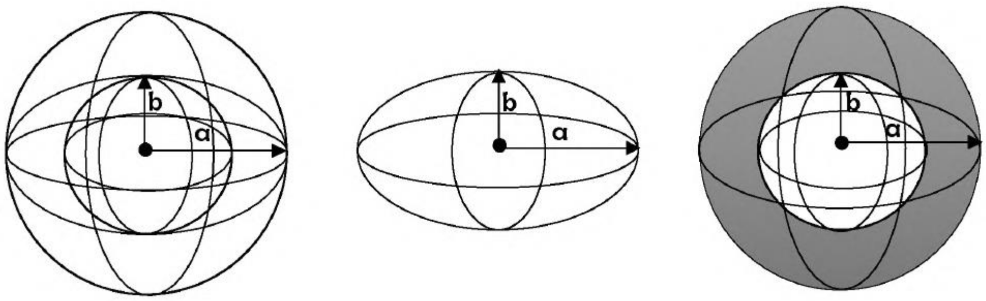
Şekil 4.7. Konilerde plastik sabit

Böylece,

$$\frac{1}{3}a^3\pi - \frac{1}{3}ab^2\pi = \frac{1}{3}b^3\pi$$
$$a^3 - ab^2 - b^3 = 0$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\frac{a}{b} = p$ plastik sabiti verir.

$a > b$ olmak üzere yarıçapı a birim olan bir küre ele alalım. Bu kürenin ortasından yarıçapı b birim olan bir küreyi çıkaralım. Elde edilen şeklin hacmi, ana eksen $2a$ birim ve küçük eksen $2b$ birimden oluşan bir elipse eşit olsun.



Şekil 4.8. Küredeki plastik sabit

Böylece,

$$\frac{4}{3}\pi b^2 a = \frac{4}{3}\pi\left(a^3 - b^3\right)$$
$$a^3 - ab^2 - b^3 = 0$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\frac{a}{b} = p$ plastik sabiti verir (de Spinadel ve Buitrago, 2009).

4.2. Genelleştirilmiş Padovan Polinom Dizisi

Bu kısımda, genelleştirilmiş Padovan polinom dizisi tanımlanmış ve bu dizinin üreteç fonksiyonları, belirli kısmi toplamları ve matrisleri ele alınmıştır.

Tanım 4.2.1. $m \in \mathbb{N}$ ve $r \geq 2$ tamsayı olsun. Genelleştirilmiş Padovan polinom dizisi başlangıç koşulları

$$\wp_{-m}^{(r)} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & 0 < m \leq r \end{cases}$$

olmak üzere

$$\wp_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{r} x^{r-k} \wp_{n-k-1}^{(r)}, \; n \geq 1$$

yineleme bağıntısıyla tanımlanır.

Bu polinom dizisi aynı zamanda r mertebeden genelleştirilmiş Padovan polinomları, Padovan $r-$adım polinomları, Padovan $r-$polinom dizileri veya $r-$dovan polinomları olarak da adlandırılır.

Buradan, r nin alabileceği değerlere göre aşağıdaki diziler elde edilebilir:

$r = 2$ için başlangıç koşulları $\wp_{-2}^{(2)} = 0$, $\wp_{-1}^{(2)} = 0$ ve $\wp_0^{(2)} = 1$ olacak şekilde

$$\wp_n^{(2)} = x\wp_{n-2}^{(2)} + \wp_{n-3}^{(2)}$$

yineleme bağıntısına Padovan polinom dizisi denir. Eğer $x = 1$ alınırsa Padovan sayı dizisi elde edilir.

$r = 3$ için başlangıç koşulları $\wp_{-3}^{(3)} = 0$, $\wp_{-2}^{(3)} = 0$, $\wp_{-1}^{(3)} = 0$ ve $\wp_0^{(3)} = 1$ olacak şekilde

$$\wp_n^{(3)} = x^2\wp_{n-2}^{(3)} + x\wp_{n-3}^{(3)} + \wp_{n-4}^{(3)}$$

yineleme bağıntısına Tridovan polinom dizisi denir. Eğer $x = 1$ alınırsa Tridovan sayı dizisi elde edilir (Vieira ve Alves, 2019).

$r = 4$ için başlangıç koşulları $\wp_{-4}^{(4)} = 0$, $\wp_{-3}^{(4)} = 0$, $\wp_{-2}^{(4)} = 0$ $\wp_{-1}^{(4)} = 0$ ve $\wp_0^{(4)} = 1$ olacak şekilde

$$\wp_n^{(4)} = x^3\wp_{n-2}^{(4)} + x^2\wp_{n-3}^{(4)} + x\wp_{n-4}^{(4)} + \wp_{n-5}^{(4)}$$

yineleme bağıntısına Tetradovan polinom dizisi denir. Eğer $x = 1$ alınırsa Tetradovan sayı dizisi elde edilir. r nin diğer değerleri için benzer isimlendirmeler verilebilir.

Genelleştirilmiş Padovan polinom dizisine $\wp_n^{(r)} = t^n$ dönüşümü uygulanırsa,

$$t^{n+r+1} - x^{r-1}t^{n+r-1} - x^{r-2}t^{n+r-2} - \cdots - xt^{n+1} - t^n = 0$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitliğin her iki tarafını t^n ile bölünürse

$$t^{r+1} - x^{r-1}t^{r-1} - x^{r-2}t^{r-2} - \cdots - xt - 1 = 0.$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu denklemin $t_1, t_2, \ldots, t_{r+1}$ kökleri birbirinden farklı olduğunu varsayalım. Buradan,

$r=2$ için kökleri $t_1,\ t_2$ ve t_3 olan Padovan polinom dizisinin karakteristik denklemi

$$t^3 - xt - 1 = 0\,,$$

$r=3$ için kökleri $t_1,\ t_2,\ t_3$ ve t_4 olan Tridovan polinom dizisinin karakteristik denklemi

$$t^4 - x^2t^2 - xt - 1 = 0\,,$$

$r=4$ için kökleri $t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4$ ve t_5 olan Tetradovan polinom dizisinin karakteristik denklemi

$$t^5 - x^3t^3 - x^2t^2 - xt - 1 = 0$$

elde edilir. Eğer $x=1$ alınırsa sırasıyla Padovan, Tridovan ve Tetradovan sayı dizilerinin karakteristik denklemlerine ulaşılır. r nin diğer değerleri için benzer isimlendirmeler verilebilir.

Teorem 4.2.1. Genelleştirilmiş Padovan polinom dizisinin karakteristik denklemin köklerine bağlı genel çözümü

$$s_1 = \frac{\begin{vmatrix} \wp_0^{(r)} & 1 & \cdots & 1 \\ \wp_1^{(r)} & t_2 & \cdots & t_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \wp_r^{(r)} & t_2^r & \cdots & t_{r+1}^r \end{vmatrix}}{\prod\limits_{1\le j<i\le r+1}\left(t_i - t_j\right)},\ s_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \wp_0^{(r)} & \cdots & 1 \\ t_1 & \wp_1^{(r)} & \cdots & t_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^r & \wp_r^{(r)} & \cdots & t_{r+1}^r \end{vmatrix}}{\prod\limits_{1\le j<i\le r+1}\left(t_i - t_j\right)},\ \ldots,\ s_r = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \wp_0^{(r)} \\ t_1 & t_2 & \cdots & \wp_1^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^r & t_2^r & \cdots & \wp_r^{(r)} \end{vmatrix}}{\prod\limits_{1\le j<i\le r+1}\left(t_i - t_j\right)}$$

olmak üzere

$$\wp_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{r+1} s_k t_k^n$$

biçimindedir.

İspat: Varsayalım ki her $n \ge 0$ için $\wp_n^{(r)} = \sum\limits_{k=1}^{r+1} s_k t_k^n$ olsun. Dizinin tanımından başlangıç değerleri göz önünde bulundurulursa

$$\wp_0^{(r)} = \sum_{k=1}^{r+1} s_k\ ,\ \wp_1^{(r)} = \sum_{k=1}^{r+1} s_k t_k\ ,\ \wp_2^{(r)} = \sum_{k=1}^{r+1} s_k t_k^2\ ,\ \ldots\ ,\ \wp_r^{(r)} = \sum_{k=1}^{r+1} s_k t_k^r$$

eşitlikleri elde edilir. Yukarıdaki doğrusal denklem sistemlerinin katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^r & t_2^r & \cdots & t_{r+1}^r \end{vmatrix}$$

dir. $t_1, t_2, ..., t_{r+1}$ kökleri farklı olduğundan, lineer denklem sisteminin determinantı sıfır değildir. Dolayısıyla lineer denklem sisteminin tek bir çözümü vardır. Cramer kuralına göre, $s_1, s_2, ..., s_{r+1}$ istenen biçimde elde edilir.

Bu takdirde, söyleyebiliriz ki r nin alabileceği değerlere göre aşağıdaki genel çözümlere ulaşılır:

$r = 2$ için karakteristik denkleminin kökleri $t_1,\ t_2$ ve t_3 olan Padovan polinom dizisinin genel çözümü

$$s_1 = \frac{\begin{vmatrix} \wp_0^{(2)} & 1 & 1 \\ \wp_1^{(2)} & t_2 & t_3 \\ \wp_2^{(2)} & t_2^2 & t_3^2 \end{vmatrix}}{(t_3-t_2)(t_3-t_1)(t_2-t_1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t_2 & t_3 \\ x & t_2^2 & t_3^2 \end{vmatrix}}{(t_3-t_2)(t_3-t_1)(t_2-t_1)} = \frac{t_3 t_2 - x}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)},$$

$$s_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \wp_0^{(2)} & 1 \\ t_1 & \wp_1^{(2)} & t_3 \\ t_1^2 & \wp_2^{(2)} & t_3^2 \end{vmatrix}}{(t_3-t_2)(t_3-t_1)(t_2-t_1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & 0 & t_3 \\ t_1^2 & x & t_3^2 \end{vmatrix}}{(t_3-t_2)(t_3-t_1)(t_2-t_1)} = \frac{t_3 t_1 - x}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)},$$

$$s_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \wp_0^{(2)} \\ t_1 & t_2 & \wp_1^{(2)} \\ t_1^2 & t_2^2 & \wp_2^{(2)} \end{vmatrix}}{(t_3-t_2)(t_3-t_1)(t_2-t_1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & 0 \\ t_1^2 & t_2^2 & x \end{vmatrix}}{(t_3-t_2)(t_3-t_1)(t_2-t_1)} = \frac{t_2 t_1 - x}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$$

olmak üzere

$$\wp_n^{(2)} = s_1 t_1^n + s_2 t_2^n + s_3 t_3^n$$

dir. Eğer $x = 1$ alınırsa Padovan sayı dizisinin genel çözümü elde edilir.

$r = 3$ için karakteristik denklemin kökleri $t_1,\ t_2,\ t_3$ ve t_4 olan Tridovan polinom dizisinin genel çözümü

$$s_1 = \frac{\begin{vmatrix} \wp_0^{(3)} & 1 & 1 & 1 \\ \wp_1^{(3)} & t_2 & t_3 & t_4 \\ \wp_2^{(3)} & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 \\ \wp_3^{(3)} & t_2^3 & t_3^3 & t_4^3 \end{vmatrix}}{(t_4-t_3)(t_4-t_2)(t_4-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_1)(t_2-t_1)},$$

$$s_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & \wp_0^{(3)} & 1 & 1\\ t_1 & \wp_1^{(3)} & t_3 & t_4\\ t_1^2 & \wp_2^{(3)} & t_3^2 & t_4^2\\ t_1^3 & \wp_3^{(3)} & t_3^3 & t_4^3\end{vmatrix}}{(t_4-t_3)(t_4-t_2)(t_4-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_1)(t_2-t_1)},$$

$$s_3=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & \wp_0^{(3)} & 1\\ t_1 & t_2 & \wp_1^{(3)} & t_4\\ t_1^2 & t_2^2 & \wp_2^{(3)} & t_4^2\\ t_1^3 & t_2^3 & \wp_3^{(3)} & t_4^3\end{vmatrix}}{(t_4-t_3)(t_4-t_2)(t_4-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_1)(t_2-t_1)},$$

$$s_4=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \wp_0^{(3)}\\ t_1 & t_2 & t_3 & \wp_1^{(3)}\\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & \wp_2^{(3)}\\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 & \wp_3^{(3)}\end{vmatrix}}{(t_4-t_3)(t_4-t_2)(t_4-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_1)(t_2-t_1)}$$

olmak üzere

$$\wp_n^{(3)}=s_1t_1^n+s_2t_2^n+s_3t_3^n+s_4t_4^n$$

dir. Böylece, Tridovan yineleme bağıntısından $\wp_0^{(3)}=1$, $\wp_1^{(3)}=0$, $\wp_2^{(3)}=x^2$ ve $\wp_3^{(3)}=x$ olmak üzere t_1, t_2, t_3 ve t_4 köklerine bağlı s_1, s_2, s_3 ve s_4 değerlerine ulaşılır. Eğer $x=1$ alınırsa Tridovan sayı dizisinin genel çözümü elde edilir.

$r=4$ için karakteristik denklemin kökleri t_1,t_2,t_3,t_4,t_5 olan Tetradovan polinom dizisinin genel çözümü

$$\wp_n^{(4)}=s_1t_1^n+s_2t_2^n+s_3t_3^n+s_4t_4^n+s_5t_5^n$$

buradan, s_1,s_2,s_3,s_4,s_5 değerleri Tetradovan polinom dizisinin yineleme bağıntısından $\wp_0^{(4)}=1$, $\wp_1^{(4)}=0$, $\wp_2^{(4)}=x^3$, $\wp_3^{(4)}=x^2$ ve $\wp_4^{(4)}=x^6+x$ olmak üzere t_1, t_2, t_3, t_4 ve t_5 köklerine bağlıdır. Eğer $x=1$ alınırsa Tetradovan sayı dizisinin genel çözümü elde edilir. r nin diğer değerleri için benzer isimlendirmeler verilebilir.

Teorem 4.2.2. Genelleştirilmiş Padovan polinom dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G_{\wp}^{(r)}(y)=\frac{1}{1-x^{r-1}y^2-x^{r-2}y^3-\cdots-y^{r+1}}$$

şeklindedir.

İspat: Genelleştirilmiş Padovan polinom dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G_{\wp}^{(r)}(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\wp_n^{(r)}y^n=\wp_0^{(r)}+\wp_1^{(r)}y+\cdots+\wp_n^{(r)}y^n+\cdots+\wp_{n+r+1}^{(r)}y^{n+r+1}+\cdots,$$

olsun. Eşitliğin her iki tarafını sırasıyla $-x^{r-1}y^2, -x^{r-2}y^3, \ldots, -y^{r+1}$ terimleri ile çarpılırsa

$$-x^{r-1}y^2G_{\wp}^{(r)}(y)=-x^{r-1}\wp_0^{(r)}y^2-x^{r-1}\wp_1^{(r)}y^3-\cdots-x^{r-1}\wp_n^{(r)}y^{n+2}-\cdots-x^{r-1}\wp_{n+r+1}^{(r)}y^{n+r+3}-\cdots$$

$$-x^{r-2}y^3G_{\wp}^{(r)}(y)=-x^{r-2}\wp_0^{(r)}y^3-x^{r-2}\wp_1^{(r)}y^4-\cdots-x^{r-2}\wp_n^{(r)}y^{n+3}-\cdots-x^{r-2}\wp_{n+r+1}^{(r)}y^{n+r+4}-\cdots$$

$$\cdots$$

$$-y^{r+1}G_{\wp}^{(r)}(y)=-\wp_0^{(r)}y^{r+1}-\wp_1^{(r)}y^{r+2}-\cdots-\wp_n^{(r)}y^{n+r+1}-\cdots-\wp_{n+r+1}^{(r)}y^{n+2r+2}-\cdots$$

eşitikleri elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}\left(1-x^{r-1}y^2-x^{r-2}y^3-\cdots-y^{r+1}\right)G_{\wp}^{(r)}(y)=\wp_0^{(r)}+\wp_1^{(r)}y+\left(\wp_2^{(r)}-x^{r-1}\wp_0^{(r)}\right)y^2\\+\left(\wp_3^{(r)}-x^{r-1}\wp_1^{(r)}-x^{r-2}\wp_0^{(r)}\right)y^3+\cdots\\+\left(\wp_n^{(r)}-x^{r-1}\wp_{n-2}^{(r)}-x^{r-2}\wp_{n-3}^{(r)}-\cdots-1\right)y^n+\cdots\\+\left(\wp_{n+r+1}^{(r)}-x^{r-1}\wp_{n+r-1}^{(r)}-x^{r-2}\wp_{n+r-2}^{(r)}-\cdots-\wp_n^{(r)}\right)y^{n+r+1}+\cdots\end{aligned}$$

özdeşliğine ulaşılır. Genelleştirilmiş Padovan polinom dizisinin başlangıç koşullarını ve

$$\wp_{n+r+1}^{(r)}-x^{r-1}\wp_{n+r-1}^{(r)}-x^{r-2}\wp_{n+r-2}^{(r)}-\cdots-\wp_n^{(r)}=0$$

eşitliği kullanılarak

$$G_{\wp}^{(r)}(y)=\frac{1}{1-x^{r-1}y^2-x^{r-2}y^3-\cdots-y^{r+1}}.$$

sonuca ulaşılır.

Böylece,

$r=2$ için Padovan polinom dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G_{\wp}^{(2)}(y)=\frac{1}{1-xy^2-y^3},$$

$r=3$ için Tridovan polinom dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G_{\wp}^{(3)}(y)=\frac{1}{1-x^2y^2-xy^3-y^4},$$

$r=4$ için Tetradovan polinom dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G_{\wp}^{(4)}(y)=\frac{1}{1-x^3y^2-x^2y^3-xy^4-y^5}$$

elde edilir. Eğer $x=1$ alınırsa sırasıyla Padovan, Tridovan ve Tetradovan sayı dizilerinin üreteç fonksiyonlarına ulaşılır. r nin diğer değerleri için benzer isimlendirmeler verilebilir.

Teorem 4.2.3: Genelleştirilmiş Padovan polinom matrisi

$$\Re_r(x)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{r-1} & 0 \end{bmatrix}_{(r+1)\times(r+1)}$$

olmak üzere $\Re_r(x)$ matrisinin $n.$ kuvveti

$$\Re_r^n(x)=\begin{bmatrix} \wp_{n-r-1}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2}x^{2-i}\wp_{n-r-i}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3}x^{3-i}\wp_{n-r-i}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r}x^{r-i}\wp_{n-r-i}^{(r)} & \wp_{n-r}^{(r)} \\ \wp_{n-r}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2}x^{2-i}\wp_{n-r-i+1}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3}x^{3-i}\wp_{n-r-i+1}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r}x^{r-i}\wp_{n-r-i+1}^{(r)} & \wp_{n-r+1}^{(r)} \\ \wp_{n-r+1}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2}x^{2-i}\wp_{n-r-i+2}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3}x^{3-i}\wp_{n-r-i+2}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r}x^{r-i}\wp_{n-r-i+2}^{(r)} & \wp_{n-r+2}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \wp_{n-2}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2}x^{2-i}\wp_{n-i-1}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3}x^{3-i}\wp_{n-i-1}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r}x^{r-i}\wp_{n-i-1}^{(r)} & \wp_{n-1}^{(r)} \\ \wp_{n-1}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2}x^{2-i}\wp_{n-i}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3}x^{3-i}\wp_{n-i}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r}x^{r-i}\wp_{n-i}^{(r)} & \wp_{n}^{(r)} \end{bmatrix}_{(r+1)\times(r+1)}$$

biçimindedir.

İspat: Tümevarım yöntemi ile $n=2$ için

$$\Re_r^1(x)\Re_r^1(x)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{r-1} & 0 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{r-1} & 0 \\ 0 & 1 & x & \cdots & x^{r-2} & x^{r-1} \end{bmatrix}=\Re_r^2(x)$$

doğru olduğu açıkça görülür. $n=k$ için iddia doğru olsun. Şimdi de $n=k+1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\Re_r^k(x)\Re_r^1(x)=\Re_r^{k+1}(x)$$

$$\begin{bmatrix} \wp_{n-r-1}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2} x^{2-i}\wp_{n-r-i}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3} x^{3-i}\wp_{n-r-i}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r} x^{r-i}\wp_{n-r-i}^{(r)} & \wp_{n-r}^{(r)} \\ \wp_{n-r}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2} x^{2-i}\wp_{n-r-i+1}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3} x^{3-i}\wp_{n-r-i+1}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r} x^{r-i}\wp_{n-r-i+1}^{(r)} & \wp_{n-r+1}^{(r)} \\ \wp_{n-r+1}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2} x^{2-i}\wp_{n-r-i+2}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3} x^{3-i}\wp_{n-r-i+2}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r} x^{r-i}\wp_{n-r-i+2}^{(r)} & \wp_{n-r+2}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \wp_{n-2}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2} x^{2-i}\wp_{n-i-1}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3} x^{3-i}\wp_{n-i-1}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r} x^{r-i}\wp_{n-i-1}^{(r)} & \wp_{n-1}^{(r)} \\ \wp_{n-1}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2} x^{2-i}\wp_{n-i}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3} x^{3-i}\wp_{n-i}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r} x^{r-i}\wp_{n-i}^{(r)} & \wp_{n}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{r-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \wp_{n-r}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2} x^{2-i}\wp_{n-r-i+1}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3} x^{3-i}\wp_{n-r-i+1}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r} x^{r-i}\wp_{n-r-i+1}^{(r)} & \wp_{n-r+1}^{(r)} \\ \wp_{n-r+1}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2} x^{2-i}\wp_{n-r-i+2}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3} x^{3-i}\wp_{n-r-i+2}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r} x^{r-i}\wp_{n-r-i+2}^{(r)} & \wp_{n-r+2}^{(r)} \\ \wp_{n-r+2}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2} x^{2-i}\wp_{n-r-i+3}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3} x^{3-i}\wp_{n-r-i+3}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r} x^{r-i}\wp_{n-r-i+3}^{(r)} & \wp_{n-r+3}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \wp_{n-1}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2} x^{2-i}\wp_{n-i}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3} x^{3-i}\wp_{n-i}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r} x^{r-i}\wp_{n-i}^{(r)} & \wp_{n}^{(r)} \\ \wp_{n}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2} x^{2-i}\wp_{n-i+1}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3} x^{3-i}\wp_{n-i+1}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r} x^{r-i}\wp_{n-i+1}^{(r)} & \wp_{n+1}^{(r)} \end{bmatrix}$$

Böylece ispat gerçekleşir.

Buradan, $r=2$ için Padovan polinom matrisin $n.$ kuvveti

$$\Re_2^n(x) = \begin{bmatrix} \wp_{n-3}^{(2)} & \wp_{n-1}^{(2)} & \wp_{n-2}^{(2)} \\ \wp_{n-2}^{(2)} & \wp_{n}^{(2)} & \wp_{n-1}^{(2)} \\ \wp_{n-1}^{(2)} & \wp_{n+1}^{(2)} & \wp_{n}^{(2)} \end{bmatrix},$$

$r=3$ için Tridovan polinom matrisin $n.$ kuvveti

$$\Re_3^n(x) = \begin{bmatrix} \wp_{n-4}^{(3)} & x\wp_{n-4}^{(3)} + \wp_{n-5}^{(3)} & \wp_{n-2}^{(3)} & \wp_{n-3}^{(3)} \\ \wp_{n-3}^{(3)} & x\wp_{n-3}^{(3)} + \wp_{n-4}^{(3)} & \wp_{n-1}^{(3)} & \wp_{n-2}^{(3)} \\ \wp_{n-2}^{(3)} & x\wp_{n-2}^{(3)} + \wp_{n-3}^{(3)} & \wp_{n}^{(3)} & \wp_{n-1}^{(3)} \\ \wp_{n-1}^{(3)} & x\wp_{n-1}^{(3)} + \wp_{n-2}^{(3)} & \wp_{n+1}^{(3)} & \wp_{n}^{(3)} \end{bmatrix},$$

$r=4$ için Tetradovan polinom matrisin $n.$ kuvveti

$$\Re_4^n(x) = \begin{bmatrix} \wp_{n-5}^{(4)} & x\wp_{n-5}^{(4)} + \wp_{n-6}^{(4)} & x^2\wp_{n-5}^{(4)} + x\wp_{n-6}^{(4)} + \wp_{n-7}^{(4)} & \wp_{n-3}^{(4)} & \wp_{n-4}^{(4)} \\ \wp_{n-4}^{(4)} & x\wp_{n-4}^{(4)} + \wp_{n-5}^{(4)} & x^2\wp_{n-4}^{(4)} + x\wp_{n-5}^{(4)} + \wp_{n-6}^{(4)} & \wp_{n-2}^{(4)} & \wp_{n-3}^{(4)} \\ \wp_{n-3}^{(4)} & x\wp_{n-3}^{(4)} + \wp_{n-4}^{(4)} & x^2\wp_{n-3}^{(4)} + x\wp_{n-4}^{(4)} + \wp_{n-5}^{(4)} & \wp_{n-1}^{(4)} & \wp_{n-2}^{(4)} \\ \wp_{n-2}^{(4)} & x\wp_{n-2}^{(4)} + \wp_{n-3}^{(4)} & x^2\wp_{n-2}^{(4)} + x\wp_{n-3}^{(4)} + \wp_{n-4}^{(4)} & \wp_{n}^{(4)} & \wp_{n-1}^{(4)} \\ \wp_{n-1}^{(4)} & x\wp_{n-1}^{(4)} + \wp_{n-2}^{(4)} & x^2\wp_{n-1}^{(4)} + x\wp_{n-2}^{(4)} + \wp_{n-3}^{(4)} & \wp_{n+1}^{(4)} & \wp_{n}^{(4)} \end{bmatrix}$$

dir. Eğer $x=1$ alınırsa sırasıyla Padovan, Tridovan ve Tetradovan sayı dizilerinin matrislerin $n.$ kuvvetlerine ulaşılır.

Teorem 4.2.4. Genelleştirilmiş Padovan polinom matrisinin $n.$ kuvvetinin tersi

$$\left(\Re_r^n(x)\right)^{-1}=\begin{bmatrix} \wp_{-n-r-1}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2} x^{2-i}\wp_{-n-r-i}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3} x^{3-i}\wp_{-n-r-i}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r} x^{r-i}\wp_{-n-r-i}^{(r)} & \wp_{-n-r}^{(r)} \\ \wp_{-n-r}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2} x^{2-i}\wp_{-n-r-i+1}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3} x^{3-i}\wp_{-n-r-i+1}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r} x^{r-i}\wp_{-n-r-i+1}^{(r)} & \wp_{-n-r+1}^{(r)} \\ \wp_{-n-r+1}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2} x^{2-i}\wp_{-n-r-i+2}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3} x^{3-i}\wp_{-n-r-i+2}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r} x^{r-i}\wp_{-n-r-i+2}^{(r)} & \wp_{-n-r+2}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \wp_{-n-2}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2} x^{2-i}\wp_{-n-i-1}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3} x^{3-i}\wp_{-n-i-1}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r} x^{r-i}\wp_{-n-i-1}^{(r)} & \wp_{-n-1}^{(r)} \\ \wp_{-n-1}^{(r)} & \sum_{i=1}^{2} x^{2-i}\wp_{-n-i}^{(r)} & \sum_{i=1}^{3} x^{3-i}\wp_{-n-i}^{(r)} & \cdots & \sum_{i=1}^{r} x^{r-i}\wp_{-n-i}^{(r)} & \wp_{-n}^{(r)} \end{bmatrix}_{(r+1)\times(r+1)}$$

biçimindedir.

İspat: Tümevarım yöntemi ile $n=1$ için

$$\Re_r^1(x)\left(\Re_r^1(x)\right)^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{r-1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -x & -x^2 & -x^3 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

doğru olduğu açıkça görülür. $n=k$ için $\Re_r^k(x)\left(\Re_r^k(x)\right)^{-1}=I$ doğru olsun. Şimdi de $n=k+1$ için doğruluğunu gösterelim . $\Re_r^{k+1}(x)\left(\Re_r^{k+1}(x)\right)^{-1}=\Re_r^k(x)\Re_r^1(x)\left(\Re_r^1(x)\right)^{-1}\left(\Re_r^k(x)\right)^{-1}=I$ olduğundan ispat tamamlanır.

$r=2$ için Padovan polinom matrisinin $n.$ kuvvetinin tersi

$$\left(\Re_2^n(x)\right)^{-1}=\Re_2^{-n}(x),$$

$r=3$ için Tridovan polinom matrisinin $n.$ kuvvetinin tersi

$$\left(\Re_3^n(x)\right)^{-1}=\Re_3^{-n}(x),$$

$r=4$ için Tetradovan polinom matrisinin $n.$ kuvvetinin tersi

$$\left(\Re_4^n(x)\right)^{-1}=\Re_4^{-n}(x)$$

elde edilir. Eğer $x=1$ alınırsa sırasıyla Padovan, Tridovan ve Tetradovan sayı dizilerinin matrislerin $n.$ kuvvetinin terslerine ulaşılır.

4.3. Ağırlıklı Padovan Toplam Formülleri

Bu kısmında, Padovan sayılarının birkaç toplam formülünü kullanarak çeşitli ağırlıklı toplam formülleri elde edilmiştir. Padovan dizisi için ilk n terimin toplam formülü

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = P_{n+5} - 3 \tag{4.1}$$

biçiminde olduğu bilinmektedir.

Teorem 4.3.1. Aşağıdaki toplam formülü doğrudur:

$$\sum_{k=1}^{n} kP_k = nP_{n+5} - P_{n+9} + 9. \tag{4.2}$$

İspat: $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} P_k$ olsun. $\sum_{k=1}^{n} kP_k$ toplam formülün sonucu aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kP_k &= P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \cdots + nP_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} P_k + \sum_{k=2}^{n} P_k + \sum_{k=3}^{n} P_k + \cdots + \sum_{k=n}^{n} P_k \\
&= \alpha_n + (\alpha_n - \alpha_1) + (\alpha_n - \alpha_2) + \cdots + (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\
&= \underbrace{(\alpha_n + \alpha_n + \cdots + \alpha_n)}_{n} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}) \\
&= n\alpha_n - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \\
&= n(P_{n+5} - 3) - \sum_{k=1}^{n-1} (P_{k+5} - 3) \\
&= n(P_{n+5} - 3) - (P_{n+9} - 12) + 3(n-1) \\
&= nP_{n+5} - P_{n+9} + 9
\end{aligned}$$

Örnek 4.3.1. (4.2) eşitliğinin $n = 5$ için doğru olduğu görülmektedir:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{5} kP_k &= 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 \\
&= 1.1 + 2.1 + 3.2 + 4.2 + 5.3 = 32 \\
&= 5.12 - 37 + 9 \\
&= 5P_{10} - P_{14} + 9
\end{aligned}$$

Teorem 4.3.2. Aşağıdaki toplam formülü doğrudur:

$$\sum_{k=1}^{n} (n-k+1) P_k = P_{n+9} + P_{n+5} - 3n - 12. \tag{4.3}$$

İspat: (4.1) ve (4.2) toplam formüllerinden,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)P_k &= \sum_{k=1}^{n}(n+1)P_k - \sum_{k=1}^{n}kP_k\\ &= (n+1)(P_{n+5}-3)-(nP_{n+5}-P_{n+9}+9)\\ &= P_{n+9}+P_{n+5}-3n-12\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.3.2. (4.3) eşitliğinin $n=3$ için doğru olduğu görülmektedir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}(3-k+1)P_k &= 3P_1+2P_2+P_3 = 3.1+2.1+2=7\\ &= 21+7-3.3-12\\ &= P_{12}+P_8-3.3-12\end{aligned}$$

Çift vet tek indisli Padovan dizisinin ilk *n* terimin toplam formülleri sırasıyla

$$\sum_{k=1}^{n}P_{2k-1}=P_{2n+2}-1 \text{ ve } \sum_{k=1}^{n}P_{2k}=P_{2n+3}-2$$

olduğu bilinmektedir.

Teorem 4.3.3. Aşağıdaki toplam formülleri doğrudur:

1. $$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)P_{2k-1}=(2n-1)P_{2n+2}-2P_{2n+3}+5, \tag{4.4}$$

2. $$\sum_{k=1}^{n}2kP_{2k}=2nP_{2n+3}-2P_{2n+4}+4. \tag{4.5}$$

İspat: $\varphi_n=\sum_{k=1}^{n}P_{2k-1}$ ve $\gamma_n=\sum_{k=1}^{n}P_{2k}$ olsun. Yukarıdaki toplam formülleri aşağıdaki şekilde kanıtlanır:

1.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)P_{2k-1} &= P_1+3P_3+5P_5+\cdots+(2n-1)P_{2n-1}\\ &= \sum_{k=1}^{n}P_{2k-1}+2\sum_{k=2}^{n}P_{2k-1}+2\sum_{k=3}^{n}P_{2k-1}+\cdots+2\sum_{k=n}^{n}P_{2k-1}\\ &= \varphi_n+2(\varphi_n-\varphi_1)+2(\varphi_n-\varphi_2)+\cdots+2(\varphi_n-\varphi_{n-1})\\ &= \varphi_n+2(n-1)\varphi_n-2\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_k\\ &= (2n-1)(P_{2n+2}-1)-2\sum_{k=1}^{n-1}(P_{2k+2}-1)\\ &= (2n-1)P_{2n+2}-2P_{2n+3}+5\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 2kP_{2k} &= 2P_2 + 4P_4 + 6P_6 + \cdots + 2nP_{2n} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} P_{2k} + 2\sum_{k=2}^{n} P_{2k} + 2\sum_{k=3}^{n} P_{2k} + \cdots + 2\sum_{k=n}^{n} P_{2k} \\ &= 2\gamma_n + 2(\gamma_n - \gamma_1) + 2(\gamma_n - \gamma_2) + \cdots + 2(\gamma_n - \gamma_{n-1}) \\ &= 2n\gamma_n - 2\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k \\ &= 2n(P_{2n+3} - 2) - 2\sum_{k=1}^{n-1}(P_{2k+3} - 2) \\ &= 2nP_{2n+3} - 2P_{2n+4} + 4\end{aligned}$$

Örnek 4.3.3. (4.4) ve (4.5) toplam formüllerinin $n = 3$ için doğru oldukları aşağıda görülmektedir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}(2k-1)P_{2k-1} &= P_1 + 3P_3 + 5P_5 \\ &= 1 + 3.2 + 5.3 = 22 \\ &= (2.3-1)7 - 2.9 + 5 \\ &= (2.3-1)P_8 - 2P_9 + 5\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3} 2kP_{2k} &= 2P_2 + 4P_4 + 6P_6 \\ &= 2.1 + 4.2 + 6.4 = 34 \\ &= 2.3.9 - 2.12 + 4 \\ &= 2.3P_9 - 2P_{10} + 4\end{aligned}$$

Teorem 4.3.4. Aşağıdaki toplam formülleri doğrudur:

1. $\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)P_{2k-1} = 2P_{2n+3} + P_{2n+2} - 2n - 5,$ (4.6)

2. $\sum_{k=1}^{n}(2n-2k)P_{2k} = 2P_{2n+4} - 4n - 4.$ (4.7)

İspat: (4.4) ve (4.5) toplam formüllerinden yararlanarak,

1.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)P_{2k-1} &= 2n\sum_{k=1}^{n}P_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n}(2k-1)P_{2k-1} \\ &= 2n(P_{2n+2} - 1) - (2n-1)P_{2n+2} + 2P_{2n+3} - 5 \\ &= 2P_{2n+3} + P_{2n+2} - 2n - 5\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2n-2k)P_{2k} &= 2n\sum_{k=1}^{n}P_{2k}-\sum_{k=1}^{n}2kP_{2k}\\ &= 2n(P_{2n+3}-2)-2nP_{2n+3}+2P_{2n+4}-4\\ &= 2P_{2n+4}-4n-4\end{aligned}$$

sonuçlara ulaşılır.

Örnek 4.3.4. (4.6) ve (4.7) toplam formüllerinin $n=3$ için doğru oldukları görülmektedir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}(6-2k+1)P_{2k-1} &= 5P_1+3P_3+P_5=5.1+3.2+3=14\\ &= 2.9+7-2.3-5\\ &= 2P_9+P_8-2.3-5\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}(6-2k)P_{2k} &= 4P_2+2P_4+0P_6=4.1+2.2+0.4=8\\ &= 2.12-4.3-4\\ &= 2P_{10}-4.3-4\end{aligned}$$

Teorem 4.3.5. a ve d keyfi reel sayılar olmak üzere aşağıdaki toplam formülü doğrudur:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[a+(k-1)d\right]P_k=(a+nd-d)P_{n+5}-dP_{n+9}+12d-3a\,.$$

İspat: (4.1) ve (4.2) toplam formüllerinden faydalanarak aşağıdaki şekilde kanıtlanır:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left[a+(k-1)d\right]P_k &= a\sum_{k=1}^{n}P_k+d\sum_{k=1}^{n}kP_k-d\sum_{k=1}^{n}P_k\\ &= a(P_{n+5}-3)+d(nP_{n+5}-P_{n+9}+9)-d(P_{n+5}-3)\\ &= (a+nd-d)P_{n+5}-dP_{n+9}+12d-3a\end{aligned}$$

Teorem 4.3.6. Aşağıdaki toplam formülü doğrudur:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2P_k=n^2P_{n+5}+(9-2n)P_{n+9}-2P_{n+6}-4P_{n+4}-65$$

İspat: (4.1) ve (4.2) toplam formüllerinden yararlanarak,

$$\sum_{k=1}^{n}k^2P_k=P_1+4P_2+9P_3+\cdots+n^2P_n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} P_k + 3\sum_{k=2}^{n} P_k + 5\sum_{k=3}^{n} P_k + \cdots + (2n-1)\sum_{k=n}^{n} P_k \\
&= \alpha_n + 3(\alpha_n - \alpha_1) + 5(\alpha_n - \alpha_2) + \cdots + (2n-1)(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\
&= n^2\alpha_n - \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)\alpha_k \\
&= n^2(P_{n+5}-3) - \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)(P_{k+5}-3) \\
&= n^2(P_{n+5}-3) - \sum_{k=6}^{n+4}(2k-9)(P_k-3) \\
&= n^2P_{n+5} - 3n^2 - 2\sum_{k=6}^{n+4} kP_k + 9\sum_{k=6}^{n+4} P_k + 6\sum_{k=6}^{n+4} k - \sum_{k=6}^{n+4} 27 \\
&= n^2P_{n+5} - 3n^2 - 2nP_{n+9} - 2P_{n+6} - 4P_{n+4} + 46 + 9P_{n+9} - 108 + 3n^2 + 27n - 30 - 27(n-1) \\
&= n^2P_{n+5} + (9-2n)P_{n+9} - 2P_{n+6} - 4P_{n+4} - 65
\end{aligned}
$$

sonuca ulaşılır.

Teorem 4.3.7. $m = 1,2,3,\ldots$ olmak üzere ağırlığı k^m olan Padovan toplamları için aşağıdaki toplam formülü gerçeklenir:

$$
\sum_{k=1}^{n} k^m P_k = n^m P_{n+3} + (n+1)^m P_{n+2} - 1 - 2\sum_{i=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \binom{m}{2i+1} \sum_{k=1}^{n} k^{m-2i-1} P_{k+2} .
$$

İspat: $S_m(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m P_k$ olsun. Böylece, binom toplam formülünden faydalanarak,

$$
\begin{aligned}
S_m(n) &= \sum_{k=1}^{n} k^m (P_{k+3} - P_{k+1}) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^m P_{k+2} - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^m P_{k+2} \\
&= n^m P_{n+3} + (n+1)^m P_{n+2} - 1 + \sum_{k=1}^{n} \left((k-1)^m - (k+1)^m\right) P_{k+2} \\
&= n^m P_{n+3} + (n+1)^m P_{n+2} - 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \left((-1)^j - 1\right) k^{m-j} \right) P_{k+2} \\
&= n^m P_{n+3} + (n+1)^m P_{n+2} - 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \binom{m}{2i+1} (-2) k^{m-2i-1} \right) P_{k+2} \\
&= n^m P_{n+3} + (n+1)^m P_{n+2} - 1 - 2\sum_{i=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \binom{m}{2i+1} \sum_{k=1}^{n} k^{m-2i-1} P_{k+2}
\end{aligned}
$$

sonuca ulaşılır.

4.4. Beşli Fibonacci-Padovan Sayı Dizisi

Bu kısımda, Fibonacci ve Padovan dizilerin karakteristik denklemlerinin köklerine sahip yeni bir sayı dizi elde edilmiştir. Elde edilen bu sayı dizisine beşli (quinary) Fibonacci-Padovan sayı dizisi denir. Daha sonra, bu dizinin karakteristik denklemin köklerine bağlı genel çözümü, üreteç fonksiyonları ve kısmi toplam formülü bulunmuştur (Dişkaya ve Menken, 2023a). Gogin ve Myllari tarafından başlangıç koşulları farklı olan aşağıdaki yineleme bağıntısı verilmiştir (Gogin ve Myllari, 2007).

Tanım 4.4.1. Başlangıç koşulları $FP_0 = 0,\ FP_1 = 1,\ FP_2 = 2,\ FP_3 = 4$ ve $FP_4 = 8$ olan

$$FP_{n+5} = FP_{n+4} + 2FP_{n+3} - 2FP_{n+1} - FP_n, \tag{4.8}$$

yineleme bağıntısını sağlayan $\{FP_n\}_{n\geq 0}$ reel sayı dizisine *beşli Fibonacci-Padovan sayı dizisi* denir.

Bu dizinin ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir:

$$FP_0 = 0,\ FP_1 = 1,\ FP_2 = 2,\ FP_3 = 4,\ FP_4 = 8,\ FP_5 = 14,\ FP_6 = 25,\ FP_7 = 43,\ FP_8 = 73.$$

(4.8) yineleme bağıntısının başlangıç koşulları sırasıyla

$FP_0 = 0,\ FP_1 = 1,\ FP_2 = 1,\ FP_3 = 2,\ FP_4 = 3$ ve $FP_0 = 1,\ FP_1 = 1,\ FP_2 = 1,\ FP_3 = 2,\ FP_4 = 2$

olarak alınırsa Fibonacci ve Padovan sayı dizilerinin ilk birkaç terimi

$FP_0 = 0,\ FP_1 = 1,\ FP_2 = 1,\ FP_3 = 2,\ FP_4 = 3,\ FP_5 = 5,\ FP_6 = 8,\ FP_7 = 13,\ FP_8 = 21$ ve

$FP_0 = 1,\ FP_1 = 1,\ FP_2 = 1,\ FP_3 = 2,\ FP_4 = 2,\ FP_5 = 3,\ FP_6 = 4,\ FP_7 = 5,\ FP_8 = 7$

şeklindedir. Beşli Fibonacci-Padovan sayı dizinin yineleme bağıntısının karakteristik denklemi

$$z^5 - z^4 - 2z^3 + 2z + 1 = 0 \tag{4.9}$$

dir. (4.9) denkleminin (2.1) ve (3.3) deki kökler arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde türetilmektedir:

$$\alpha + \beta + r_1 + r_2 + r_3 = 1 \text{ ve } \alpha\beta r_1 r_2 r_3 = -1.$$

Teorem 4.4.1. Beşli Fibonacci-Padovan sayı dizisinin karakteristik denklemin köklerine bağlı genel çözümü

$$j_1 = \frac{3\alpha + 2}{(\alpha - \beta)(\alpha - r_1)(\alpha - r_2)(\alpha - r_3)},$$

$$j_2 = \frac{3\beta + 2}{(\beta - \alpha)(\beta - r_1)(\beta - r_2)(\beta - r_3)},$$

$$j_3 = \frac{r_1 + r_2 r_3 + 2}{(r_1 - \alpha)(r_1 - \beta)(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)},$$

$$j_4 = \frac{r_2 + r_1 r_3 + 2}{(r_2 - \alpha)(r_2 - \beta)(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)},$$

$$j_5 = \frac{r_3 + r_1 r_2 + 2}{(r_3 - \alpha)(r_3 - \beta)(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)}$$

olmak üzere

$$FP_n = j_1\alpha^n + j_2\beta^n + j_3 r_1^n + j_4 r_2^n + j_4 r_3^n \tag{4.10}$$

şeklindedir.

İspat: Cramer kuralı veya Gauss-Jordan eleme yöntemi ile ispatı kolayca gerçekleştirilebilir.

Teorem 4.4.2. Beşli Fibonacci-Padovan sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G_{FP}(x) = \frac{x^2 + x}{1 - x - 2x^2 + 2x^4 + x^5}$$

şeklindedir.

İspat:

$$G_{FP}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} FP_n x^n = FP_0 + FP_1 x + FP_2 x^2 + \cdots + FP_n x^n + \cdots$$

beşli Fibonacci-Padovan sayı dizisinin üreteç fonksiyonu olsun. Eşitliğin her iki tarafına sırasıyla $-x$, $-2x^2$, $2x^4$ ve x^5 terimleri ile çarpma işlemi uygulandığında

$$-xG_{FP}(x) = -FP_0 x - FP_1 x^2 - FP_2 x^3 - \cdots - FP_n x^{n+1} - \cdots,$$

$$-2x^2 G_{FP}(x) = -2FP_0 x^2 - 2FP_1 x^3 - 2FP_2 x^4 - \cdots - 2FP_n x^{n+2} - \cdots,$$

$$2x^4 G_{FP}(x) = 2FP_0 x^4 + 2FP_1 x^5 + 2FP_2 x^6 + \cdots + 2FP_n x^{n+4} + \cdots,$$

$$x^5 G_{FP}(x) = FP_0 x^5 + FP_1 x^6 + FP_2 x^7 + \cdots + FP_n x^{n+5} + \cdots$$

elde edelir. Sonra, taraf tarafa toplama işlemi ile

$$\begin{aligned}(1 - x - 2x^2 + 2x^4 + x^5)G_{FP}(x) = {} & FP_0 + (FP_1 - FP_0)x + (FP_2 - FP_1 - 2FP_0)x^2 \\ & + (FP_3 - FP_2 - 2FP_1)x^3 + (FP_4 - FP_3 - 2FP_2 + 2FP_0)x^4 + \cdots \\ & + (FP_n - FP_{n-1} - 2FP_{n-2} + 2FP_{n-4} + FP_{n-5})x^n + \cdots\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Beşli Fibonacci-Padovan sayı dizisinin başlangıç koşullarını ve

$$FP_n - FP_{n-1} - 2FP_{n-2} + 2FP_{n-4} + FP_{n-5} = 0$$

eşitliği kullanarak

$$G_{FP}(x) = \frac{x^2 + x}{1 - x - 2x^2 + 2x^4 + x^5}$$

elde edilir. Böylece, ispat tamamlanır.

Not edelim ki beşli Fibonacci-Padovan dizisinin üreteç fonksiyonu, aşağıdaki gibi Fibonacci ve Padovan dizisinin üreteç fonksiyonlarının çarpımıdır:

$$G_F(x) G_P(x) = \left(\frac{x}{1-x-x^2}\right)\left(\frac{1+x}{1-x-x^3}\right) = \frac{x^2+x}{1-x-2x^2+2x^4+x^5} = G_{FP}(x).$$

Teorem 4.4.3. Beşli Fibonacci-Padovan sayı dizisinin üstel üreteç fonksiyonu

$$E_{FP}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{FP_n}{n!} x^n = j_1 e^{\alpha x} + j_2 e^{\beta x} + j_3 e^{r_1 x} + j_4 e^{r_2 x} + j_4 e^{r_3 x}$$

şeklindedir.

İspat: $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ olduğundan,

$$e^{\alpha x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^n, \; e^{\beta x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} x^n, \; e^{r_1 x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_1^n}{n!} x^n, \; e^{r_2 x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_2^n}{n!} x^n \text{ ve } e^{r_3 x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_3^n}{n!} x^n$$

sonuçlarına ulaşılır. Sonra, ilk eşitliğin her iki tarafı j_1, ikinci eşitliğin j_2, üçüncü eşitliğin j_3, dördüncü eşitliğin j_4, ve beşinci eşitliğin j_5 ile çarpılıp tüm eşitlikler toplanırsa (4.10) eşitliği kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$j_1 e^{\alpha x} + j_2 e^{\beta x} + j_3 e^{r_1 x} + j_4 e^{r_2 x} + j_4 e^{r_3 x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_1 \alpha^n + j_2 \beta^n + j_3 r_1^n + j_4 r_2^n + j_4 r_3^n}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{FP_n}{n!} x^n .$$

Teorem 4.4.4. Beşli Fibonacci-Padovan sayılarının kısmi toplam formülü

$$\sum_{n=0}^{m} FP_n = 2FP_{m+3} + 2FP_{m+2} - FP_{m+5} + 2$$

şeklindedir.

İspat: Beşli Fibonacci-Padovan sayı dizisinin tanımından

$$FP_{n+5} - FP_{n+4} = 2FP_{n+3} - 2FP_{n+1} - FP_n$$

olduğu bilinmektedir. Böylece,

$$\begin{aligned} FP_5 - FP_4 &= 2FP_3 - 2FP_1 - FP_0 \\ FP_6 - FP_5 &= 2FP_4 - 2FP_2 - FP_1 \\ FP_7 - FP_6 &= 2FP_5 - 2FP_3 - FP_2 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \qquad \quad \vdots \\ FP_{m+4} - FP_{m+3} &= 2FP_{m+2} - 2FP_m - FP_{m-1} \\ FP_{m+5} - FP_{m+4} &= 2FP_{m+3} - 2FP_{m+1} - FP_m \end{aligned}$$

eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$2FP_{m+3} + 2FP_{m+2} - FP_{m+5} + 2 = \sum_{n=0}^{m} FP_n$$

elde edilir. Böylece, ispat tamamlanır.

4.5. Bi-Periyodik Padovan Sayı Dizisi

Bu kısımda, bi-periyodik Padovan sayı dizisi tanımlanmış ve bu sayı dizisinin karakteristik denklemin köklerine bağlı genel çözümü, üreteç fonksiyonları ve kısmi toplam formülü incelenmiştir.

Tanım 4.5.1. a ve b sıfırdan farklı reel sayılar olsun. Başlangıç koşulları $p_0 = 1$, $p_1 = 0$ ve $p_2 = a$ olan

$$p_n = \begin{cases} ap_{n-2} + p_{n-3}, & \text{eğer } n \text{ çift ise} \\ bp_{n-2} + p_{n-3}, & \text{eğer } n \text{ tek ise} \end{cases}, \quad n \geq 3 \tag{4.11}$$

yineleme bağıntısını sağlayan $\{p_n\}_{n\geq 0}$ dizisine *bi-periyodik Padovan sayı dizisi* denir.

Bi-periyodik Padovan sayı dizisinin ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir:

$p_0 = 1$, $p_1 = 0$, $p_2 = a$, $p_3 = 1$, $p_4 = a^2$, $p_5 = b + a$, $p_6 = a^3 + 1$, $p_7 = b^2 + ab + a^2$.

Yukarıdaki tanımdan, bi-periyodik Padovan sayı dizisi için bir kübik denklem aşağıdaki gibi olsun:

$$x^3 - abx - ab = 0. \tag{4.12}$$

(4.12) denkleminin r_1^{ab}, r_2^{ab} ve r_3^{ab} kökleri arasında aşağıdaki gibi ilişkiler kurulur:

$$\begin{aligned} & r_1^{ab} + r_2^{ab} + r_3^{ab} = 0, \\ & r_1^{ab} r_2^{ab} r_3^{ab} = ab, \\ & r_1^{ab} r_2^{ab} + r_1^{ab} r_3^{ab} + r_2^{ab} r_3^{ab} = -ab. \end{aligned}$$

Teorem 4.5.1. Bi-periyodik Padovan sayı dizisinin karakteristik denklemin köklerine bağlı genel çözümü

$$q_1^a=\frac{(r_2^{ab}-a)(r_3^{ab}-a)}{(r_1^{ab}-r_2^{ab})(r_1^{ab}-r_3^{ab})},\ q_2^a=\frac{(r_1^{ab}-a)(r_3^{ab}-a)}{(r_2^{ab}-r_1^{ab})(r_2^{ab}-r_3^{ab})},\ q_3^a=\frac{(r_1^{ab}-a)(r_2^{ab}-a)}{(r_3^{ab}-r_1^{ab})(r_3^{ab}-r_2^{ab})}\ ,$$

$$q_1^b=\frac{a+b-r_2^{ab}-r_3^{ab}}{r_1^{ab}(r_1^{ab}-r_2^{ab})(r_1^{ab}-r_3^{ab})},\ q_2^b=\frac{a+b-r_1^{ab}-r_3^{ab}}{r_2^{ab}(r_2^{ab}-r_1^{ab})(r_2^{ab}-r_3^{ab})}\ \text{ve}\ q_3^b=\frac{a+b-r_1^{ab}-r_2^{ab}}{r_3^{ab}(r_3^{ab}-r_1^{ab})(r_3^{ab}-r_2^{ab})}$$

olmak üzere,

$$p_n=\begin{cases} q_1^a(r_1^{ab})^n+q_2^a(r_2^{ab})^n+q_3^a(r_3^{ab})^n,\ n=2k \\ q_1^b(r_1^{ab})^n+q_2^b(r_2^{ab})^n+q_3^b(r_3^{ab})^n,\ n=2k+1 \end{cases},\ n\geq 0,\ k\in\mathbb{N}. \tag{4.13}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: Bi-periyodik Padovan sayılarının (4.12) denklemi ve r_1^{ab}, r_2^{ab} ve r_3^{ab} kökleri ile elde edilen fark denkleminin genel çözümü (4.13) eşitliği olsun. Burada, bi-periyodik Padovan sayı dizisinin başlangıç koşullarını göz önünde bulundurarak, q_1^a, q_2^a, q_3^a, q_1^b, q_2^b ve q_3^b değerlerini aşağıdaki eşitlikleri kullanılarak Cramer kuralı veya Gauss eleme yöntemi ile hesaplanır:

$$\begin{aligned} p_0&=q_1^a+q_2^a+q_3^a=1 \\ p_2&=q_1^a(r_1^{ab})^2+q_2^a(r_2^{ab})^2+q_3^a(r_3^{ab})^2=a \\ p_4&=q_1^a(r_1^{ab})^4+q_2^a(r_2^{ab})^4+q_3^a(r_3^{ab})^4=a^2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} p_1&=q_1^b r_1^{ab}+q_2^b r_2^{ab}+q_3^b r_3^{ab}=0 \\ p_3&=q_1^b(r_1^{ab})^3+q_2^b(r_2^{ab})^3+q_3^b(r_3^{ab})^3=1 \\ p_5&=q_1^b(r_1^{ab})^5+q_2^b(r_2^{ab})^5+q_3^b(r_3^{ab})^5=a+b \end{aligned}$$

Önerme 4.5.1. Aşağıdaki özdeşlikler doğrudur:

i. $$p_{2k+1}=(a+b)\,p_{2k-1}-abp_{2k-3}+p_{2k-5}, \tag{4.14}$$

ii. $$p_{2k}=(a+b)\,p_{2k-2}-abp_{2k-4}+p_{2k-6}. \tag{4.15}$$

İspat: (4.11) yineleme bağıntısından,

i.

$$\begin{aligned} p_{2k+1}&=bp_{2k-1}+p_{2k-2} \\ &=bp_{2k-1}+ap_{2k-4}+p_{2k-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= bp_{2k-1} + a\left(p_{2k-1} - bp_{2k-3}\right) + p_{2k-5} \\
&= bp_{2k-1} + ap_{2k-1} - abp_{2k-3} + p_{2k-5} \\
&= (a+b)\,p_{2k-1} - abp_{2k-3} + p_{2k-5}
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
p_{2k} &= ap_{2k-2} + p_{2k-3} \\
&= ap_{2k-2} + bp_{2k-5} + p_{2k-6} \\
&= ap_{2k-2} + b\left(p_{2k-2} - ap_{2k-4}\right) + p_{2k-6} \\
&= ap_{2k-2} + bp_{2k-2} - abp_{2k-4} + p_{2k-6} \\
&= (a+b)\,p_{2k-2} - abp_{2k-4} + p_{2k-6}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.5.2. Bi-periyodik Padovan sayı dizisi için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \frac{-x^3 + bx^2 - 1}{x^6 - abx^4 + (a+b)x^2 - 1}$$

şeklindedir.

İspat:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k+1} x^{2k+1}$$

olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k} x^{2k} = p_0 + p_2 x^2 + \cdots + p_{2n} x^{2n} + \cdots$$

üreteç fonksiyonuna sırasıyla -1, $-abx^4$, $(a+b)x^2$ ve x^6 ile çarpma işlemi uygulandığında

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k} x^{2k} &= -p_0 - p_2 x^2 - p_4 x^4 - \sum_{k=3}^{\infty} p_{2k} x^{2k}, \\
-ab\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k} x^{2k+4} &= -abp_0 x^4 - ab\sum_{k=3}^{\infty} p_{2k-4} x^{2k}, \\
(a+b)\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k} x^{2k+2} &= (a+b)\,p_0 x^2 + (a+b)\,p_2 x^4 + (a+b)\sum_{k=3}^{\infty} p_{2k-2} x^{2k}, \\
\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k} x^{2k+6} &= \sum_{k=3}^{\infty} p_{2k-6} x^{2k}
\end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır. Sonra, taraf tarafa toplanır ve (4.15) eşitliği kullanırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k} x^{2k} = \frac{bx^2 - 1}{x^6 - abx^4 + (a+b)x^2 - 1}$$

Benzer şekilde,

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k+1}x^{2k+1} = p_1x + p_3x^3 + \cdots + p_{2n+1}x^{2n+1} + \cdots$$

olmak üzere sırasıyla -1, $-abx^4$, $(a+b)x^2$ ve x^6 ile çarpma işlemi uygulandığında

$$-\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k+1}x^{2k+1} = -p_1x - p_3x^3 - p_5x^5 - \sum_{k=3}^{\infty} p_{2k+1}x^{2k+1},$$

$$-ab\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k+1}x^{2k+5} = -abp_1x^5 - ab\sum_{k=3}^{\infty} p_{2k-3}x^{2k+1},$$

$$(a+b)\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k+1}x^{2k+3} = (a+b)\,p_1x^3 + (a+b)\,p_3x^5 + (a+b)\sum_{k=3}^{\infty} p_{2k-1}x^{2k+1},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k+1}x^{2k+7} = \sum_{k=3}^{\infty} p_{2k-5}x^{2k+1}.$$

eşitlikleri elde edilir. Sonra, taraf tarafa toplanır ve (4.14) eşitliği kullanırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k+1}x^{2k+1} = \frac{-x^3}{x^6 - abx^4 + (a+b)x^2 - 1}.$$

Böylece,

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k+1}x^{2k+1} = \frac{-x^3 + bx^2 - 1}{x^6 - abx^4 + (a+b)x^2 - 1}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 4.5.3. Bi-periyodik Padovan sayı dizisi için üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{x^n}{n!} = \begin{cases} q_1^a e^{r_1^{ab}x} + q_2^a e^{r_2^{ab}x} + q_3^a e^{r_3^{ab}x}, & n = 2k \\ q_1^b e^{r_1^{ab}x} + q_2^b e^{r_2^{ab}x} + q_3^b e^{r_3^{ab}x}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat: (4.13) eşitliğinden faydalanarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{x^n}{n!} = \begin{cases} q_1^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r_1^{ab}x)^n}{n!} + q_2^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r_2^{ab}x)^n}{n!} + q_3^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r_3^{ab}x)^n}{n!}, & n = 2k \\ q_1^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r_1^{ab}x)^n}{n!} + q_2^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r_2^{ab}x)^n}{n!} + q_3^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r_3^{ab}x)^n}{n!}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} q_1^a e^{r_1^{ab}x} + q_2^a e^{r_2^{ab}x} + q_3^a e^{r_3^{ab}x}, & n = 2k \\ q_1^b e^{r_1^{ab}x} + q_2^b e^{r_2^{ab}x} + q_3^b e^{r_3^{ab}x}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 4.5.4. Bi-periyodik Padovan sayı dizisi için kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=0}^{n} p_k == \frac{p_{n-3} + p_{n-2} + p_{n+1} + p_{n+2} + (1-ab)(p_n + p_{n-1}) + b - 2}{a+b-ab}$$

şeklindedir.

İspat:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} p_{2k} + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} p_{2k+1}$$

olmak üzere $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} p_{2k}$ toplam formülü aşağıdaki gibi çözülür. (4.15) eşitliğinden

$$p_{2k} - p_{2k-6} = (a+b)\,p_{2k-2} - abp_{2k-4}$$

sonucuna ulaşılır. Sonra,

$$\begin{aligned}
&p_6 - p_0 = (a+b)\,p_4 - abp_2\\
&p_8 - p_2 = (a+b)\,p_6 - abp_4\\
&p_{10} - p_4 = (a+b)\,p_8 - abp_6\\
&\vdots\\
&p_n - p_{n-6} = (a+b)\,p_{n-2} - abp_{n-4}
\end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır. Böylece,

$$p_{n+2} + p_n + p_{n-2} - abp_n + b - 1 = (a+b-ab)\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} p_{2k}$$

dir. $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} p_{2k+1}$ toplam formülü aşağıdaki gibi çözülür. (4.14) eşitliğinden

$$p_{2k+1} - p_{2k-5} = (a+b)\,p_{2k-1} - abp_{2k-3}$$

sonucuna ulaşılır. Sonra,

$$\begin{aligned}
&p_7 - p_1 = (a+b)\,p_5 - abp_3\\
&p_9 - p_3 = (a+b)\,p_7 - abp_5\\
&p_{11} - p_5 = (a+b)\,p_9 - abp_7\\
&\vdots\\
&p_{n-1} - p_{n-7} = (a+b)\,p_{n-3} - abp_{n-5}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece,

$$p_{n+1}+p_{n-1}+p_{n-3}-abp_{n-1}-1=(a+b-ab)\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}p_{2k+1}.$$

dir. Buradan,

$$\sum_{k=0}^{n}p_k=\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}p_{2k}+\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}p_{2k+1}=\frac{p_{n-3}+p_{n-2}+p_{n+1}+p_{n+2}+(1-ab)(p_n+p_{n-1})+b-2}{a+b-ab}$$

elde edilir. Böylece, ispat tamamlanır.

4.6. Simetrik Padovan Sayı Dizisi

Bu kısımda, Padovan sayı dizisinin başlangıç koşullarını $P_0=0$, $P_1=0$ ve $P_2=1$ alınarak simetrik Padovan sayı dizisi olarak adlandırılan yeni bir dizi tanımlanmış ve simetrik olduğunu gösteren bir tablo verilmiştir. Sonra, çeşitli özdeşliklere ulaşılmıştır (Dişkaya ve Menken, 2022).

Tanım 4.6.1. Başlangıç koşulları sırasıyla

$$p_{0,n}=P_n,\ p_{1,n}=P_{n+3},\ p_{2,n}=P_{n+5}\ \text{ve}\ p_{m,0}=P_m,\ p_{m,1}=P_{m+3},\ p_{m,2}=P_{m+5} \tag{4.16}$$

olan

$$p_{m,n}=p_{m,n-2}+p_{m,n-3},\ n\geq 3, \tag{4.17}$$
$$p_{m,n}=p_{m-2,n}+p_{m-3,n},\ m\geq 3 \tag{4.18}$$

iki yineleme bağıntısını sağlayan $\{p_{m,n}\}_{m\geq 0, n\geq 0}$ reel sayı dizisine *simetrik Padovan sayı dizisi* denir. Böylece, aşağıdaki tablo elde edilir:

Tablo 4.1. Simetrik Padovan sayı dizisinin ilk birkaç terimi

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	1	0	1	1	1	2	2	3	4
1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9
2	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16
3	0	1	2	1	3	3	4	6	7	10	13
4	1	2	3	3	5	6	8	11	14	19	25
5	1	2	4	3	6	7	9	13	16	22	29
6	1	3	5	4	8	9	12	17	21	29	38
7	2	4	7	6	11	13	17	24	30	41	54
8	2	5	9	7	14	16	21	30	37	51	67
9	3	7	12	10	19	22	29	41	51	70	92
10	4	9	16	13	25	29	38	54	67	92	121

Tablo 4.1 de görülebileceği üzere dizinin simetri özelliği (4.17) ve (4.18) eşitliklerinden yararlanılarak aşağıdaki biçimde gösterilir:

$$p_{m,n} = p_{n,m}$$

Önerme 4.6.1. Aşağıdaki özdeşlik doğrudur:

$$p_{m,n} = P_m P_{n+5} + P_{m+1} P_{n+3} + P_{m-1} P_n,\ n,m \geq 3. \tag{4.19}$$

İspat: (4.16) ve (4.18) eşitlikleri dikkate alındığında kolayca görülebilir. Gerçekten, her $n \geq 3$ için

$$\begin{aligned}
p_{3,n} &= p_{1,n} + p_{0,n} = P_{n+3} + P_n \\
p_{4,n} &= p_{2,n} + p_{1,n} = P_{n+5} + P_{n+3} \\
p_{5,n} &= p_{3,n} + p_{2,n} = P_{n+5} + P_{n+3} + P_n \\
p_{6,n} &= p_{4,n} + p_{3,n} = P_{n+5} + 2P_{n+3} + P_n \\
p_{7,n} &= p_{5,n} + p_{4,n} = 2P_{n+5} + 2P_{n+3} + P_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

tümevarım yöntemine göre $n,m \geq 3$ için

$$p_{m,n} = p_{m-2,n} + p_{m-3,n} = P_m P_{n+5} + P_{m+1} P_{n+3} + P_{m-1} P_n$$

olduğu görülür.

Teorem 4.6.1. Simetrik Padovan sayı dizisinin karakteristik denklemin köklerine bağlı genel çözümü $a_m = P_m r_1^5 + P_{m+1} r_1^3 + P_{m-1}$, $b_m = P_m r_2^5 + P_{m+1} r_2^3 + P_{m-1}$ ve $c_m = P_m r_3^5 + P_{m+1} r_3^3 + P_{m-1}$ olmak üzere

$$p_{m,n} = z_1 a_m r_1^n + z_2 b_m r_2^n + z_3 c_m r_3^n \tag{4.20}$$

şeklindedir.

İspat: (4.19) ve (3.8) eşitliklerini kullanılarak,

$$\begin{aligned}
p_{m,n} &= P_m P_{n+5} + P_{m+1} P_{n+3} + P_{m-1} P_n \\
&= P_m \left(z_1 r_1^{n+5} + z_2 r_2^{n+5} + z_3 r_3^{n+5} \right) + P_{m+1} \left(z_1 r_1^{n+3} + z_2 r_2^{n+3} + z_3 r_3^{n+3} \right) + P_{m-1} \left(z_1 r_1^n + z_2 r_2^n + z_3 r_3^n \right) \\
&= z_1 \left(P_m r_1^5 + P_{m+1} r_1^3 + P_{m-1} \right) r_1^n + z_2 \left(P_m r_2^5 + P_{m+1} r_2^3 + P_{m-1} \right) r_2^n + z_3 \left(P_m r_3^5 + P_{m+1} r_3^3 + P_{m-1} \right) r_3^n \\
&= z_1 a_m r_1^n + z_2 b_m r_2^n + z_3 c_m r_3^n
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Teorem 4.6.2. Simetrik Padovan sayı dizisi için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_{m,n} x^n y^m = \frac{x^2 + xy(x+y+1) + y^2}{(1-x^2-x^3)(1-y^2-y^3)}$$

biçimindedir.

İspat: (4.16) eşitliğinden,

$$p_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{0,n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}P_nx^n=\frac{x^2}{1-x^2-x^3},$$

$$p_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{1,n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}P_{n+3}x^n=\frac{x^2+x}{1-x^2-x^3},$$

$$p_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{2,n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}P_{n+5}x^n=\frac{x^2+x+1}{1-x^2-x^3}$$

sonucuna ulaşılır ve (4.18) eşitliğinden

$$p_m(x)=p_{m-2}(x)+p_{m-3}(x)$$

olduğu söylenir. Böylece,

$$p_m(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{m,n}x^n=\frac{P_{m+4}x^2+P_{m+3}x+P_m}{1-x^2-x^3}$$

elde edilir. Sonra, ispat aşağıdaki gibi kanıtlanır:

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}p_{m,n}x^ny^m &= \frac{x^2}{1-x^2-x^3}\sum_{m=0}^{\infty}P_{m+4}y^m+\frac{x}{1-x^2-x^3}\sum_{m=0}^{\infty}P_{m+3}y^m+\frac{1}{1-x^2-x^3}\sum_{m=0}^{\infty}P_my^m\\ &=\frac{x^2}{1-x^2-x^3}\frac{y+1}{1-y^2-y^3}+\frac{x}{1-x^2-x^3}\frac{y^2+y}{1-y^2-y^3}+\frac{1}{1-x^2-x^3}\frac{y^2}{1-y^2-y^3}\\ &=\frac{x^2+xy(x+y+1)+y^2}{(1-x^2-x^3)(1-y^2-y^3)}\end{aligned}$$

Teorem 4.6.3. Simetrik Padovan sayı dizisi için üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_{m,n}\frac{x^n}{n!}=z_1a_me^{r_1x}+z_2b_me^{r_2x}+z_3c_me^{r_3x}$$

şeklindedir.

İspat:

$$e^{r_1x}=\sum_{n=0}^{\infty}r_1^n\frac{x^n}{n!},\ e^{r_2x}=\sum_{n=0}^{\infty}r_2^n\frac{x^n}{n!}\ \text{ve}\ e^{r_3x}=\sum_{n=0}^{\infty}r_3^n\frac{x^n}{n!}$$

olduğundan (4.20) eşitliği yardımıyla

$$
\begin{aligned}
E_p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} z_1 a_m r_1^n + z_2 b_m r_2^n + z_3 c_m r_3^n \frac{x^n}{n!} \\
&= z_1 a_m \sum_{n=0}^{\infty} r_1^n \frac{x^n}{n!} + z_2 b_m \sum_{n=0}^{\infty} r_2^n \frac{x^n}{n!} + z_3 c_m \sum_{n=0}^{\infty} r_3^n \frac{x^n}{n!} \\
&= z_1 a_m e^{r_1 x} + z_2 b_m e^{r_2 x} + z_3 c_m e^{r_3 x}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 4.6.4. Simetrik Padovan sayı dizisi için toplam formülü

$$
\sum_{t=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} p_{t,k} = (P_{n+10} - 3)(P_{m+5} - 1) + (P_{n+8} - 2)(P_{m+6} - 1) + (P_{n+5} - 1)(P_{m+4})
$$

biçimindedir.

İspat: (4.19) eşitliğini kullanarak,

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} p_{t,k} &= \sum_{t=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} (P_t P_{k+5} + P_{t+1} P_{k+3} + P_{t-1} P_k) \\
&= \sum_{t=0}^{m} P_t \sum_{k=0}^{n} P_{k+5} + \sum_{t=0}^{m} P_{t+1} \sum_{k=0}^{n} P_{k+3} + \sum_{t=0}^{m} P_{t-1} \sum_{k=0}^{n} P_k \\
&= (P_{n+10} - 3) \sum_{t=0}^{m} P_t + (P_{n+8} - 2) \sum_{t=0}^{m} P_{t+1} + (P_{n+5} - 1) \sum_{t=0}^{m} P_{t-1} \\
&= (P_{n+10} - 3)(P_{m+5} - 1) + (P_{n+8} - 2)(P_{m+6} - 1) + (P_{n+5} - 1)(P_{m+4})
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır.

4.7. Titreşimli Padovan Sayı Dizisi

Bu kısımda, çok sayıda genelleştirmeye sahip olan Padovan sayı dizileri için yeni bir genelleme verilmektedir.

Tanım 4.7.1. a, b ve c sabit reel sayılar olsun. Başlangıç koşulları $\Upsilon_1 = \Omega_1 = a$, $\Upsilon_2 = b$ ve $\Omega_2 = c$ olan

$$
\begin{aligned}
\Upsilon_{2k+1} = \Omega_{2k+1} = \Upsilon_{2k} + \Omega_{2k}, \\
\Upsilon_{2k} = \Omega_{2k-2} + \Upsilon_{2k-3}, \\
\Omega_{2k} = \Upsilon_{2k-2} + \Omega_{2k-3}
\end{aligned}
$$

iki yenileme bağıntısını sağlayan $\{\Upsilon_k\}_{k\geq 1}$ ve $\{\Psi_k\}_{k\geq 1}$ dizi çiftine *titreşimli Padovan sayı dizisi* denir. Bu dizi çiftinin ilk birkaç terimi Tablo 4.2 de verilmiştir.

Tablo 4.2. Titreşimli Padovan sayı dizisinin ilk birkaç terimi

n	Υ_n	$\Upsilon_n = \Omega_n$	Ω_n
1		a	
2	b		c
3		$b+c$	
4	$a+c$		$a+b$
5		$2a+b+c$	
6	$a+2b+c$		$a+b+2c$
7		$2a+3b+3c$	
8	$3a+2b+3c$		$3a+3b+2c$
9		$6a+5b+5c$	
10	$5a+6b+5c$		$5a+5b+6c$
11		$10a+11b+11c$	
12	$11a+10b+11c$		$11a+11b+10c$
13		$22a+21b+21c$	
14	$21a+22b+21c$		$21a+21b+22c$

Teorem 4.7.1. k. Jacobsthal sayısı j_k ile gösterilsin. $k \geq 1$ için

$$\Upsilon_{2k+1} = \Omega_{2k+1} = j_k\left(b+c\right)+2j_{k-1}a,$$

$$\Upsilon_{2k} = j_{k-1}\left(a+c\right)+2j_{k-2}b,$$

$$\Omega_{2k} = j_{k-1}\left(a+b\right)+2j_{k-2}c$$

özdeşlikleri doğrudur.

İspat: $k=1$ için iddia doğrudur. İddianın $k \geq 1$ için doğru olduğunu varsayalım. Şimdi $k+1$ doğal sayısı için doğru olduğunu gösterelim.

İlk olarak,

$$\begin{aligned}\Upsilon_{2k+1} = \Omega_{2k+1} &= \Upsilon_{2k} + \Omega_{2k} \\ &= j_{k-1}(2a+b+c)+2j_{k-2}(b+c) \\ &= (j_{k-1}+2j_{k-2})(b+c)+2j_{k-1}a \\ &= j_k(b+c)+2j_{k-1}a\end{aligned}$$

İkinci olarak,

$$\begin{aligned}\Upsilon_{2k+2} &= \Omega_{2k} + \Upsilon_{2k-1} \\ &= j_{k-1}(a+b)+2j_{k-2}c + j_{k-1}(b+c)+2j_{k-2}a \\ &= (j_{k-1}+2j_{k-2})(a+c)+2j_{k-1}b \\ &= j_k(a+c)+2j_{k-1}b\end{aligned}$$

Üçüncü olarak,

$$\begin{aligned}\Omega_{2k+2} &= \Upsilon_{2k} + \Omega_{2k-1} \\ &= j_{k-1}(a+c) + 2j_{k-2}b + j_{k-1}(b+c) + 2j_{k-2}a \\ &= (j_{k-1} + 2j_{k-2})(a+b) + 2j_{k-1}c \\ &= j_k(a+b) + 2j_{k-1}c\end{aligned}$$

$c=-b$ durumunda titreşimli Padovan sayı dizisinin tablosu aşağıdaki gibidir.

Tablo 4.3. $c=-b$ olduğu titreşimli Padovan sayı dizisinin ilk birkaç terimi

n	Υ_n	$\Upsilon_n=\Omega_n$	Ω_n
1		a	
2	b		$-b$
3		0	
4	$a-b$		$a+b$
5		$2a$	
6	$a+b$		$a-b$
7		$2a$	
8	$3a-b$		$3a+b$
9		$6a$	
10	$5a+b$		$5a-b$
11		$10a$	
12	$11a-b$		$11a+b$
13		$22a$	
14	$21a+b$		$21a-b$

$c=b$ durumunda titreşimli Padovan sayı dizisinin tablosu aşağıdaki gibi olur.

Tablo 4.4. $c=b$ olduğu titreşimli Padovan sayı dizisinin ilk birkaç terimi

n	Υ_n	$\Upsilon_n=\Omega_n$	Ω_n
1		a	
2	b		c
3		$2b$	
4	$a+b$		$a+b$
5		$2a+2b$	
6	$a+3b$		$a+3b$
7		$2a+6b$	
8	$3a+5b$		$3a+5b$
9		$6a+10b$	
10	$5a+11b$		$5a+11b$
11		$10a+22b$	
12	$11a+21b$		$11a+21b$
13		$22a+42b$	
14	$21a+43b$		$21a+43b$

4.7.1. Genelleştirilmiş Titreşimli Padovan Sayı Dizisi

Tanım 4.7.1.1. $b_1, b_2, \ldots, b_k$ ve a sabit reel sayılar olsun. Başlangıç koşulları

$$\tau_{1,1} = \tau_{2,1} = \cdots = \tau_{k,1} = a,$$
$$\tau_{1,2} = b_1, \tau_{2,2} = b_2, \ldots, \tau_{k,2} = b_k,$$

olmak üzere $m \geq 1$ pozitif doğal sayı için inşa edilen k dizi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{gathered}
\tau_{1,2m+1} = \tau_{2,2m+1} = \cdots = \tau_{k,2m+1} = \tau_{1,2m} + \tau_{2,2m} + \cdots + \tau_{k,2m}, \\
\tau_{1,2m} = \tau_{k,2m-2} + \tau_{1,2m-3}, \\
\tau_{2,2m} = \tau_{k-1,2m-2} + \tau_{2,2m-3}, \\
\vdots \\
\tau_{k,2m} = \tau_{1,2m-2} + \tau_{k,2m-3}.
\end{gathered}$$

Bu dizilere *genelleştirilmiş titreşimli Padovan sayı dizisi* denir. $B = \sum_{i=1}^{k} b_i$ olmak üzere yukarıdaki dizilerin ilk birkaç terimi aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.5. Genelleştirilmiş titreşimli Padovan sayı dizisinin ilk birkaç terimi

m	$\tau_{1,m}$	$\tau_{2,m}$	$\cdots$	$\tau_{k,m}$
1	a	a	$\cdots$	a
2	b_1	b_2	$\cdots$	b_k
3	B	B	$\cdots$	B
4	$a+b_k$	$a+b_{k-1}$	$\cdots$	$a+b_1$
5	$ka+B$	$ka+B$	$\cdots$	$ka+B$
6	$a+b_1+B$	$a+b_2+B$	$\cdots$	$a+b_k+B$
7	$ka+(k+1)B$	$ka+(k+1)B$	$\cdots$	$ka+(k+1)B$
8	$(k+1)a+b_k+2B$	$(k+1)a+b_{k-1}+2B$	$\cdots$	$(k+1)a+b_1+2B$

Teorem 4.7.1.1. $j.\ k-$Fibonacci sayısı $F_{j,k}$ ile gösterilsin. $1 \leq m$ ve $1 \leq i \leq k$ için

$$\begin{aligned}
\tau_{i,4m} &= F_{2m-1,k}a + b_{k-i+1} + \left(\sum_{j=0}^{2m-2} F_{j,k}\right)B, \\
\tau_{i,4m-1} &= kF_{2m-2,k}a + F_{2m-1,k}B, \\
\tau_{i,4m-2} &= F_{2m-2,k}a + b_i + \left(\sum_{j=0}^{2m-3} F_{j,k}\right)B, \\
\tau_{i,4m-3} &= kF_{2m-3,k}a + F_{2m-2,k}B,
\end{aligned}$$

özdeşlikleri doğrudur. Burada, $k-$Fibonacci sayı dizisi, başlangıç koşulları $F_{0,k}=0$ ve $F_{1,k}=1$ olan $F_{n+2,k}=F_{n+1,k}+kF_{n,k}$ yenileme bağıntısına denir.

İspat: $m=1$ için iddia doğru olduğu açıktır. $m\geq 1$ doğal sayıların doğru olduğunu varsayalım. Şimdi $m+1$ doğal sayısı için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\tau_{1,4m-1}=\tau_{2,4m-1}=\cdots=\tau_{n,4m-1}=\tau_{1,4m-2}+\tau_{2,4m-2}+\cdots+\tau_{k,4m-2}&\\ &=kF_{2m-2,k}a+B+k\left(\sum_{j=0}^{2m-3}F_{j,k}\right)B\\ &=kF_{2m-2,k}a+\left(F_{1,k}+kF_{0,k}+kF_{1,k}+\cdots+kF_{2m-3,k}\right)B\\ &=kF_{2m-2,k}a+F_{2m-1,k}B\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\tau_{1,4m-3}=\tau_{2,4m-3}=\cdots=\tau_{k,4m-3}=\tau_{1,4m-4}+\tau_{2,4m-4}+\cdots+\tau_{k,4m-4}&\\ &=kF_{2m-3,k}a+B+k\left(\sum_{j=0}^{2m-4}F_{j,k}\right)B\\ &=kF_{2m-3,k}a+\left(F_{1,k}+kF_{0,k}+kF_{1,k}+\cdots+kF_{2m-4,k}\right)B\\ &=kF_{2m-3,k}a+F_{2m-2,k}B\end{aligned}$$

4.8. Padovan Üçgen Dizisi

Bu kısımda, Padovan sayı dizisinin terimleri ile oluşturulmuş Pascal üçgenine benzer bir üçgen sistemi tanıtılmaktadır. Ayrıca Padovan üçgen dizisinin tanımı yapılıp çeşitli özdeşlikler verilmektedir (Dişkaya ve Menken, 2020).

Tanım 4.8.1. Başlangıç koşulları $\rho_{0,0}=\rho_{0,1}=\rho_{1,1}=\rho_{0,2}=\rho_{1,2}=\rho_{2,2}=\rho_{1,3}=\rho_{2,3}=\rho_{2,4}=1$ olan

$$\rho_{m,n}=\rho_{m,n-2}+\rho_{m,n-3},\ (n\geq 3) \tag{4.21}$$

$$\rho_{m,n}=\rho_{m-2,n-2}+\rho_{m-3,n-3},\ (m,n\geq 3) \tag{4.22}$$

yineleme bağıntılarını sağlayan $\{\rho_{m,n}\}_{m\geq n\geq 0}$ dizisine *Padovan üçgen dizisi* denir.

Burada $\rho_{m,n}$ gösteriminde m sütunu, n satırı temsil etmektedir. $\{\rho_{m,n}\}_{m\geq n\geq 0}$ dizisinin sayıları Şekil 4.9 da, sembolik gösterimi de Şekil 4.10 da gösterilmektedir.

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 1 \quad 1 \\
2 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \\
2 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \\
3 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \\
4 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\
5 \quad 4 \quad 3 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\
7 \quad 5 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \\
9 \quad 7 \quad 5 \quad 8 \quad 6 \quad 6 \quad 8 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \\
12 \quad 9 \quad 7 \quad 10 \quad 8 \quad 9 \quad 8 \quad 10 \quad 7 \quad 9 \quad 12 \\
16 \quad 12 \quad 9 \quad 14 \quad 10 \quad 12 \quad 12 \quad 10 \quad 14 \quad 9 \quad 12 \quad 16 \\
21 \quad 16 \quad 12 \quad 18 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 15 \quad 14 \quad 18 \quad 12 \quad 16 \quad 21 \\
\iddots \quad \iddots \quad \iddots \quad \iddots \quad \iddots \quad \iddots \quad \iddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots
\end{array}$$

Şekil 4.9. Padovan üçgen dizisinin terimleri

$$\begin{array}{c}
\rho_{0,0} \\
\rho_{0,1} \quad \rho_{1,1} \\
\rho_{0,2} \quad \rho_{1,2} \quad \rho_{2,2} \\
\rho_{0,3} \quad \rho_{1,3} \quad \rho_{2,3} \quad \rho_{3,3} \\
\rho_{0,4} \quad \rho_{1,4} \quad \rho_{2,4} \quad \rho_{3,4} \quad \rho_{4,4} \\
\rho_{0,5} \quad \rho_{1,5} \quad \rho_{2,5} \quad \rho_{3,5} \quad \rho_{4,5} \quad \rho_{5,5} \\
\rho_{0,6} \quad \rho_{1,6} \quad \rho_{2,6} \quad \rho_{3,6} \quad \rho_{4,6} \quad \rho_{5,6} \quad \rho_{6,6} \\
\iddots \quad \iddots \quad \iddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots
\end{array}$$

Şekil 4.10. Padovan üçgen dizisinin sembolik gösterimi

(4.21) eşitliği kullanılarak başlangıç koşulları $\rho_{0,0} = P_0 = 1,\ \ \rho_{0,1} = P_1 = 1,\ \rho_{0,2} = P_2 = 1$ olmak üzere 0. sütun,

$$\rho_{0,n} = \rho_{0,n-2} + \rho_{0,n-3}$$

yineleme bağıntısını sağlanır. Böylece, $\rho_{0,n} = P_n$ olduğu açıkça görülür.

Benzer şekilde $\rho_{n,n} = \rho_{n,n-2} + \rho_{n,n-3}$ yineleme bağıntısında da $\rho_{n,n} = P_n$ olduğu sonucuna varılır. Bu durumda Şekil 4.9 ve Şekil 4.10 dan

$$\rho_{0,n} = \rho_{n,n} = P_n,\ \rho_{1,n} = \rho_{n-1,n} = P_{n-1} \text{ ve } \rho_{2,n} = \rho_{n-2,n} = P_{n-2}$$

olduğu görülür. (4.21) yineleme bağıntısının art arda uygulanmasıyla,

$$\begin{aligned}
\rho_{m,n} &= \rho_{m,n-2} + \rho_{m,n-3} \\
&= \rho_{m,n-3} + \rho_{m,n-4} + \rho_{m,n-5} \\
&= \rho_{m,n-4} + 2\rho_{m,n-5} + \rho_{m,n-6} \\
&= 2\rho_{m,n-5} + 2\rho_{m,n-6} + \rho_{m,n-7} \\
&= 2\rho_{m,n-6} + 3\rho_{m,n-7} + 2\rho_{m,n-8} \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu şekilde devam edilirse, $\rho_{m,n}$ Padovan üçgen sayıları ve P_n Padovan sayıları arasında aşağıdaki gibi bir ilişki bulunur:

$$\rho_{m,n} = P_{k-2}\rho_{m,n-k} + P_{k-1}\rho_{m,n-k-1} + P_{k-3}\rho_{m,n-k-2}, \quad 2 \le k \le n-m-2.$$

Böylece, $k = n-m-2$ için

$$\begin{aligned}
\rho_{m,n} &= P_{n-m-4}\rho_{m,m+2} + P_{n-m-3}\rho_{m,m+1} + P_{n-m-5}\rho_{m,m} \\
&= P_{n-m-4}P_m + P_{n-m-3}P_m + P_{n-m-5}P_m \\
&= \left(P_{n-m-4} + P_{n-m-3} + P_{n-m-5}\right)P_m \\
&= \left(P_{n-m-2} + P_{n-m-3}\right)P_m
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\rho_{m,n} = P_{n-m}P_m \tag{4.23}$$

elde edilir. Buradan, Padovan üçgen dizilerindeki her eleman iki Padovan sayısının çarpımı şeklinde olduğu görülür. Örneğin,

$$\begin{aligned}
\rho_{4,6} &= P_{6-4}P_4 = P_2P_4 = 1.2 = 2, \\
\rho_{6,9} &= P_{9-6}P_6 = P_3P_6 = 2.4 = 8
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca, (4.23) eşitliğinden,

$$\rho_{m,n} = \rho_{n-m,n}$$

olur. $n = 2r$ ve $m = r$ alınırsa $\rho_{r,2r} = P_r^2$ dir. Böylece, $\rho_{r,2r}$ Padovan sayılarının karesidir. Diğer bir deyişle, Şekil 4.9 da görüldüğü üzere ortadaki dikey çizgi boyunca uzanan elemanlar Padovan sayılarının kareleridir. Örneğin, $\rho_{3,6} = P_3^2 = 4,$ $\rho_{5,10} = P_5^2 = 9$ dir.

Teorem 4.8.1. Padovan üçgen dizisi için (3.2) denkleminin köklerine bağlı genel çözümü

$$\begin{aligned}
a_m &= p_1^{\,2} + p_1p_2r_2^{\,2m}r_3^{\,m} + p_1p_3r_2^{\,m}r_3^{\,2m}, \\
b_m &= p_2^{\,2} + p_1p_2r_1^{\,2m}r_3^{\,m} + p_2p_3r_1^{\,m}r_3^{\,2m}, \\
c_m &= p_3^{\,2} + p_1p_3r_1^{\,2m}r_2^{\,m} + p_2p_3r_1^{\,m}r_2^{\,2m}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\rho_{m,n} = a_mr_1^{\,n} + b_mr_2^{\,n} + c_mr_3^{\,n}$$

şeklindedir.

İspat: (3.6) ve (4.23) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
\rho_{m,n} = P_{n-m}P_m &= \left(p_1 r_1^{\,n-m} + p_2 r_2^{\,n-m} + p_3 r_3^{\,n-m}\right)\left(p_1 r_1^{\,m} + p_2 r_2^{\,m} + p_3 r_3^{\,m}\right) \\
&= p_1^{\,2} r_1^{\,n} + p_1 p_2 r_1^{\,n-m} r_2^{\,m} + p_1 p_3 r_1^{\,n-m} r_3^{\,m} + p_1 p_2 r_1^{\,m} r_2^{\,n-m} + p_2^{\,2} r_2^{\,n} + p_2 p_3 r_2^{\,n-m} r_3^{\,m} \\
&+ p_1 p_3 r_1^{\,m} r_3^{\,n-m} + p_2 p_3 r_2^{\,m} r_3^{\,n-m} + p_3^{\,2} r_3^{\,n} \\
&= \left(p_1^{\,2} + p_1 p_2 r_2^{\,2m} r_3^{\,m} + p_1 p_3 r_2^{\,m} r_3^{\,2m}\right) r_1^{\,n} + \left(p_2^{\,2} + p_1 p_2 r_1^{\,2m} r_3^{\,m} + p_2 p_3 r_1^{\,m} r_3^{\,2m}\right) r_2^{\,n} \\
&+ \left(p_3^{\,2} + p_1 p_3 r_1^{\,2m} r_2^{\,m} + p_2 p_3 r_1^{\,m} r_2^{\,2m}\right) r_3^{\,n} \\
&= a_m r_1^{\,n} + b_m r_2^{\,n} + c_m r_3^{\,n}.
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

Teorem 4.8.2. Padovan üçgen dizisinin toplam formülü için üreteç fonksiyonu

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\rho_{m,n}\right)x^n = \frac{1+2x+x^2}{\left(1-x^2-x^3\right)^2}
$$

şeklindedir.

İspat: Padovan üçgen dizisinin toplam formülü için üreteç fonksiyonu

$$
G_\rho(x) = \rho_{0,0} + \left(\rho_{0,1}+\rho_{1,1}\right)x + \left(\rho_{0,2}+\rho_{1,2}+\rho_{2,2}\right)x^2 + \cdots + \left(\rho_{0,n}+\rho_{1,n}+\cdots+\rho_{n,n}\right)x^n + \cdots
$$

olmak üzere bu fonksiyonun her tarafını sırasıyla $-2x^2$, $-2x^3$, x^4, $2x^5$ ve x^6 ile çarparak;

$$
\begin{aligned}
-2x^2 G_\rho(x) &= -2\rho_{0,0}x^2 - 2\left(\rho_{0,1}+\rho_{1,1}\right)x^3 - 2\left(\rho_{0,2}+\rho_{1,2}+\rho_{2,2}\right)x^4 - \cdots \\
&\quad - 2\left(\rho_{0,n}+\rho_{1,n}+\cdots+\rho_{n,n}\right)x^{n+2} - \cdots \\
-2x^3 G_\rho(x) &= -2\rho_{0,0}x^3 - 2\left(\rho_{0,1}+\rho_{1,1}\right)x^4 - 2\left(\rho_{0,2}+\rho_{1,2}+\rho_{2,2}\right)x^5 - \cdots \\
&\quad - 2\left(\rho_{0,n}+\rho_{1,n}+\cdots+\rho_{n,n}\right)x^{n+3} - \cdots \\
x^4 G_\rho(x) &= \rho_{0,0}x^4 + \left(\rho_{0,1}+\rho_{1,1}\right)x^5 + \left(\rho_{0,2}+\rho_{1,2}+\rho_{2,2}\right)x^6 + \cdots \\
&\quad + \left(\rho_{0,n}+\rho_{1,n}+\cdots+\rho_{n,n}\right)x^{n+4} + \cdots \\
2x^5 G_\rho(x) &= 2\rho_{0,0}x^5 + 2\left(\rho_{0,1}+\rho_{1,1}\right)x^6 + 2\left(\rho_{0,2}+\rho_{1,2}+\rho_{2,2}\right)x^7 + \cdots \\
&\quad + 2\left(\rho_{0,n}+\rho_{1,n}+\cdots+\rho_{n,n}\right)x^{n+5} + \cdots \\
x^6 G_\rho(x) &= \rho_{0,0}x^6 + \left(\rho_{0,1}+\rho_{1,1}\right)x^7 + \left(\rho_{0,2}+\rho_{1,2}+\rho_{2,2}\right)x^8 + \cdots \\
&\quad + \left(\rho_{0,n}+\rho_{1,n}+\cdots+\rho_{n,n}\right)x^{n+6} + \cdots
\end{aligned}
$$

eşitliklerini elde ederiz. Böylece, taraf tarafa toplanırsa

$$\left(1-x^2-x^3\right)^2 G_\rho\left(x\right)=\rho_{0,0}+\left(\rho_{0,1}+\rho_{1,1}\right)x+\left(\rho_{0,2}+\rho_{1,2}+\rho_{2,2}\right)x^2+\cdots$$
$$+\left(\sum_{m=0}^{n}\rho_{m,n}-2\sum_{m=0}^{n-2}\rho_{m,n-2}-2\sum_{m=0}^{n-3}\rho_{m,n-3}+\sum_{m=0}^{n-4}\rho_{m,n-4}+2\sum_{m=0}^{n-5}\rho_{m,n-5}+\sum_{m=0}^{n-6}\rho_{m,n-6}\right)x^n+\cdots$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\sum_{m=0}^{n}\rho_{m,n}-2\sum_{m=0}^{n-2}\rho_{m,n-2}-2\sum_{m=0}^{n-3}\rho_{m,n-3}+\sum_{m=0}^{n-4}\rho_{m,n-4}+2\sum_{m=0}^{n-5}\rho_{m,n-5}+\sum_{m=0}^{n-6}\rho_{m,n-6}=0$$

eşitliği kullanılarak

$$G_\rho\left(x\right)=\frac{1+2x+x^2}{\left(1-x^2-x^3\right)^2}$$

elde edilir.

Önerme 4.8.1. Aşağıdaki özdeşlikler doğrudur:

i. $\rho_{m,n}=\rho_{m+3,n+6}+\rho_{m+1,n+2}-\left(\rho_{m+1,n+4}+\rho_{m+3,n+4}\right)$,

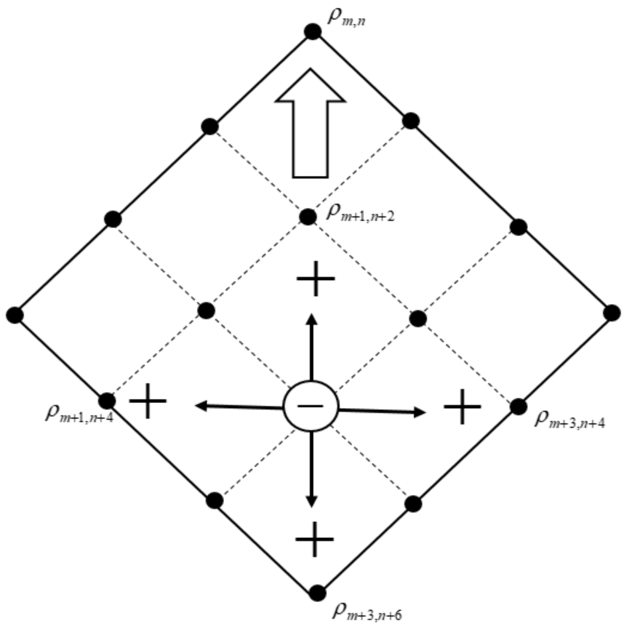
ii. $\rho_{m-1,n-2}\rho_{m+1,n+2}=\rho_{m-1,n}\rho_{m+1,n}$,

iii. $\rho_{m+3,n+6}=\rho_{m+1,n+2}+\rho_{m+1,n+1}+\rho_{m,n+1}+\rho_{m,n}$,

iv. $\rho_{n,2n}=\rho_{0,n}\rho_{n,n}$.

İspat:

i. (4.23) ve Şekil 4.10 kullanarak Şekil 4.11 elde edilir:

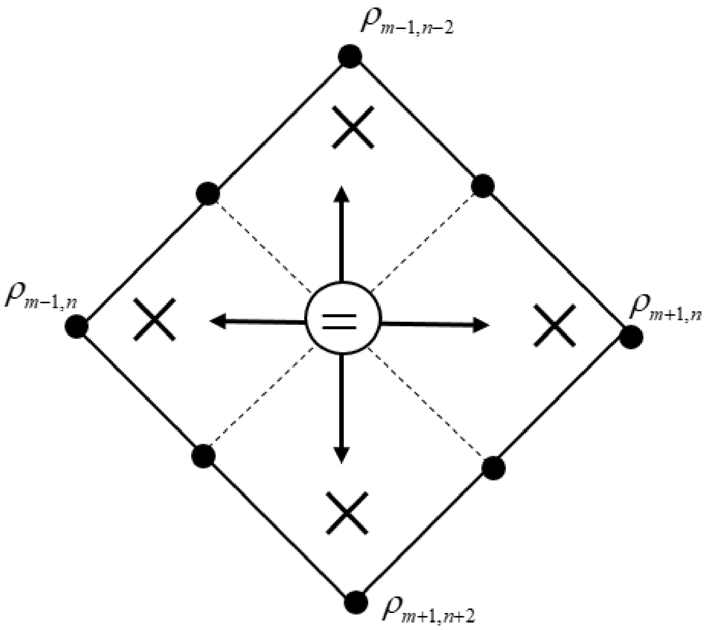


Şekil 4.11. i. özdeşliğin gösterimi

Şekil 4.11 ve (4.23) eşitliği ile aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$\begin{aligned}
\rho_{m,n} &= P_{n-m}P_m \\
&= P_{n-m}\left(P_{m+3}-P_{m+1}\right) \\
&= -P_{n-m}P_{m+1}+P_{n-m}P_{m+3} \\
&= \left(P_{n-m+1}-P_{n-m+3}\right)P_{m+1}+\left(P_{n-m+3}-P_{n-m+1}\right)P_{m+3} \\
&= P_{n-m+3}P_{m+3}+P_{n-m+1}P_{m+1}-\left(P_{n-m+3}P_{m+1}+P_{n-m+1}P_{m+3}\right) \\
&= \rho_{m+3,n+6}+\rho_{m+1,n+2}-\left(\rho_{m+1,n+4}+\rho_{m+3,n+4}\right)
\end{aligned}$$

ii. (4.23) eşitliği ve Şekil 4.10 kullanarak Şekil 4.12 elde edilir:

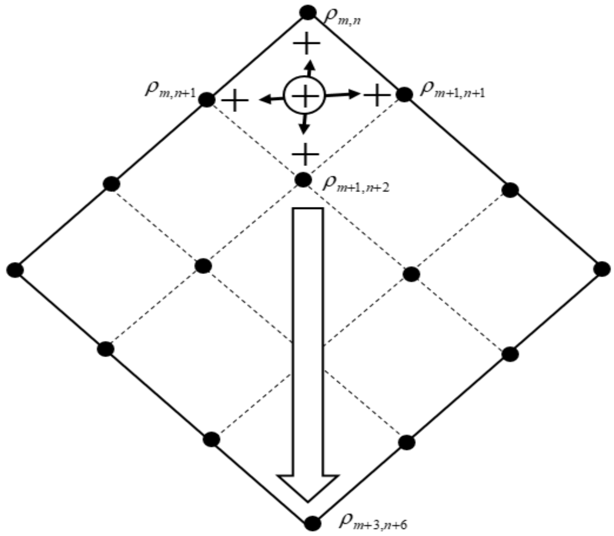


Şekil 4.12. ii. özdeşliğin gösterimi

Şekil 4.12 ve (4.23) eşitliği ile aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$\begin{aligned}
\rho_{m-1,n-2}\rho_{m+1,n+2} &= P_{m-n-1}P_{m-1}P_{n-m+1}P_{m+1} \\
&= P_{n-m+1}P_{m-1}P_{n-m-1}P_{m+1} \\
&= \rho_{m-1,n}\rho_{m+1,n}
\end{aligned}$$

iii. (4.23) eşitliği ve Şekil 4.10 kullanarak Şekil 4.13 elde edilir:

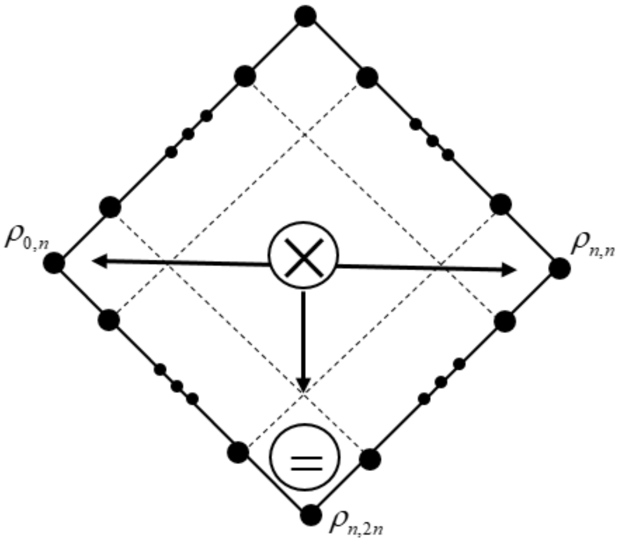


Şekil 4.13. iii. özdeşliğin gösterimi

Şekil 4.13 ve (4.23) eşitliği ile aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$\begin{aligned}\rho_{m+3,n+6} &= P_{n-m+3}P_{m+3}\\ &= P_{n-m+3}P_{m+1} + P_{n-m+3}P_{m}\\ &= P_{n-m+1}P_{m+1} + P_{n-m}P_{m+1} + P_{n-m+1}P_{m} + P_{n-m}P_{m}\\ &= \rho_{m+1,n+2} + \rho_{m+1,n+1} + \rho_{m,n+1} + \rho_{m,n}\end{aligned}$$

iv. (4.23) eşitliği ve Şekil 4.10 kullanarak Şekil 4.14 elde edilir:



Şekil 4.14. iv. özdeşliğin gösterimi

Şekil 4.14 ve (4.23) eşitliği ile aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$\begin{aligned}\rho_{n,2n} &= P_{n}P_{n}\\ &= P_{n}P_{0}P_{0}P_{n}\\ &= \rho_{0,n}\rho_{n,n}\end{aligned}$$

4.9. Bernoulli-Padovan Sayıları ve Polinomları

Bu kısımda, Bernoulli *P*-sayıları ve *P*-polinomları, Bernoulli-Padovan sayıları ve polinomları ve Pado-Bernoulli matrisi araştırılmış ve çeşitli özdeşlikler elde edilmiştir (Dişkaya ve Menken, 2023b).

Bernoulli *P*-sayıları ve *P*-polinomları için bazı özellikler:

- Padovan sayılarına göre açılım gösteren *P*-faktöriyel,

$$P_n! = P_n P_{n-1} P_{n-2} \ldots P_1 P_0,\ P_0! = 1$$

şeklinde tanımlanır.

- $n \geq k \geq 1$ olmak üzere Padonomial katsayılar

$$\binom{n}{k}_P = \frac{P_n!}{P_{n-k}!P_k!}, \tag{4.24}$$

ile tanımlanır. Eğer, $n < k$ ise $\binom{n}{k}_P = 0$ dır. Ayrıca $\binom{n}{0}_P = 1$ dir.

Buradan, (4.24) eşitliği kullanılarak,

- $\binom{n}{k}_P = \binom{n}{n-k}_P$
- $\binom{n}{k}_P \binom{k}{j}_P = \binom{n}{j}_P \binom{n-j}{k-j}_P$ (4.25)
- $\dfrac{P_{n-k} + P_k}{P_n} \binom{n}{k}_P = \binom{n-1}{k-1}_P + \binom{n-1}{k}_P$

eşitlikler kolayca kanıtlanabilir.

- *P*-analog için binom açılımı

$$(x +_P y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_P x^k y^{n-k}.$$

ile gösterilir.

- *P*-üstel üreteç fonksiyonu

$$e_P^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{P_n!} \tag{4.26}$$

şeklindedir.

- K cismi üzerindeki polinomların cebiri Q olsun.

$$D_P^x\left(x^n\right)=P_n x^{n-1},\ n\geq 0$$

koşulu sağlayan $D_P^x:Q\rightarrow Q$ bir lineer dönüşümü *P*-türev olarak isimlendirilir. Buradan,

$$D_P^x\left(e_P^{tx}\right)=te_P^{tx} \tag{4.27}$$

sonucuna ulaşılır.

Tanım 4.9.1. $\binom{n}{k}_P$ Padonomial katsayılar ve P_n $n.$ Padovan sayısı olsun. Bernoulli *P*-sayıları

$$B_{n,P}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{P_{k+1}}\binom{n}{k}_P$$

ile tanımlanır. Bernoulli *P*- sayılarının birkaç elemanı aşağıdaki gibidir:

$$B_{0,P}=1,\ B_{1,P}=2,\ B_{2,P}=\frac{5}{2},\ B_{3,P}=\frac{9}{2},\ B_{4,P}=\frac{19}{3},\ B_{5,P}=\frac{45}{4}.$$

Aşağıdaki teoremin ispatında kullanacağımız $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n x^n$ iki sonsuz serinin Cauchy çarpımı,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_{n-k} \tag{4.28}$$

biçiminde tanımlandığını hatırlatalım.

Teorem 4.9.1. $B_{n,P}$ Bernoulli *P*-sayıları için üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,P}\frac{t^n}{P_n!}=\frac{\left(e_P^t-1\right)e_P^t}{t}$$

biçimindedir.

İspat: (4.26) ve (4.28) eşitlikleri yardımıyla,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,P}\frac{t^n}{P_n!}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{P_{k+1}}\binom{n}{k}_P\right)\frac{t^n}{P_n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{P_{k+1}}\frac{P_n!}{P_{n-k}!P_k!}\frac{1}{P_n!}\right)t^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{P_{k+1}!}\frac{1}{P_{n-k}!}\right)t^n\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{P_{n+1}!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{P_n!}\right)\\
&=\frac{1}{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{P_{n+1}!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{P_n!}\right)\\
&=\frac{1}{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{P_n!}-1\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{P_n!}\right)\\
&=\frac{\left(e_P^t-1\right)e_P^t}{t}
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır.

Tanım 4.9.2. $\binom{n}{k}_P$ Padonomial katsayılar ve P_n n. Padovan sayısı olsun. Bernoulli *P*-polinomları

$$
B_{n,P}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{P_{k+1}}\binom{n}{k}_P x^{n-k}
$$

ile tanımlanır. Bernoulli *P*-polinomların birkaç terimi aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
&B_{0,P}(x)=1,\\
&B_{1,P}(x)=x+1,\\
&B_{2,P}(x)=x^2+x+\frac{1}{2},\\
&B_{3,P}(x)=x^3+2x^2+x+\frac{1}{2},\\
&B_{4,P}(x)=x^4+2x^3+2x^2+x+\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Teorem 4.9.2. $B_{n,P}(x)$ Bernoulli *P*-polinomları için üstel üreteç fonksiyonu

$$
\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,P}(x)\frac{t^n}{P_n!}=\frac{\left(e_P^t-1\right)e_P^{xt}}{t}
$$

şeklindedir.

İspat: (4.26) ve (4.28) eşitlikleri yardımıyla,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,P}(x)\frac{t^n}{P_n!}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{P_{k+1}}\binom{n}{k}_P x^{n-k}\right)\frac{t^n}{P_n!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{P_{k+1}}\frac{P_n!}{P_{n-k}!P_k!}\frac{x^{n-k}}{P_n!}\right)t^n
\end{aligned}
$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{P_{k+1}!}\frac{x^{n-k}}{P_{n-k}!}\right)t^n$$
$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{P_{n+1}!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{P_n!}\right)$$
$$=\frac{1}{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{P_{n+1}!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{P_n!}\right)$$
$$=\frac{1}{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{P_n!}-1\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{P_n!}\right)$$
$$=\frac{\left(e_P^t-1\right)e_P^{xt}}{t}$$

sonuca ulaşılır.

Tanım 4.9.3. $B_n^P\left(x\right)$ Bernoulli-Padovan polinomları üstel üreteç fonksiyonu yardımıyla

$$\frac{te_P^{tx}}{e_P^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^P\left(x\right)\frac{t^n}{P_n!} \tag{4.29}$$

ile tanımlanır. Bernoulli-Padovan sayıları, Bernoulli-Padovan polinomlarının $x=0$ daki değerleridir. Yani, $B_n^P=B_n^P\left(0\right)$ dır.

Bernoulli sayıları üstel üreteç fonksiyonu yardımıyla

$$\frac{t}{e_P^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^P\frac{t^n}{P_n!} \tag{4.30}$$

biçiminde tanımlanır. Başka bir deyişle,

$B_n^P\left(x\right)$ Bernoulli-Padovan polinomları, B_r^P Bernoulli-Padovan sayıları olmak üzere

$$B_n^P\left(x\right)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}_P B_r^P x^{n-r}$$

şeklinde tanımlanır. İlk birkaç Bernoulli–Padovan polinomu aşağıdaki gibidir:

$B_0^P\left(x\right)=1,$

$B_1^P\left(x\right)=x-1,$

$B_2^P\left(x\right)=x^2-x+\frac{1}{2},$

$B_3^P\left(x\right)=x^3-2x^2+x-\frac{1}{2},$

$B_4^P\left(x\right)=x^4-2x^3+2x^2-x+\frac{2}{3},$

$$B_5^P(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x - \frac{5}{4}.$$

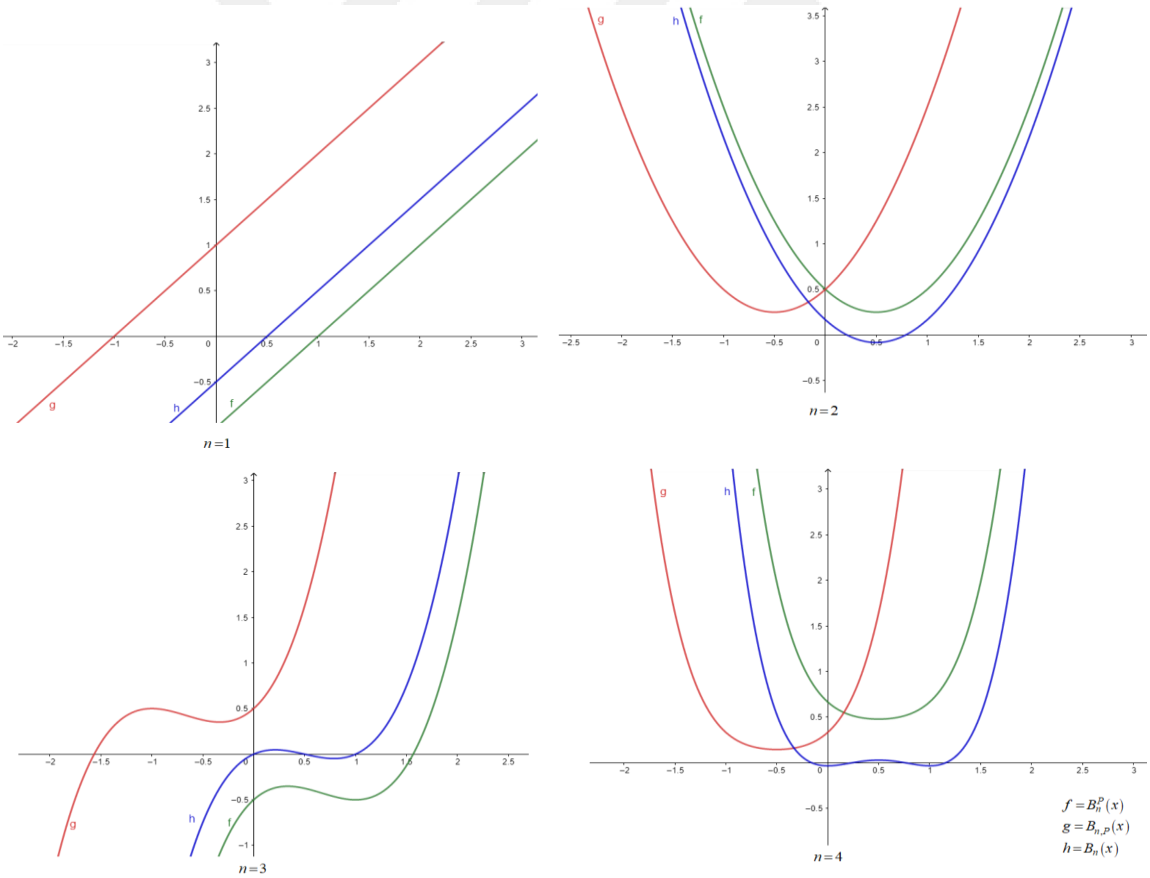
B_n^P Bernoulli-Padovan sayıları, $B_0^P = 1$ olmak üzere

$$B_n^P = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}_P B_r^P, \; (n > 1)$$

ile tanımlanır. İlk birkaç Bernoulli – Padovan sayısı aşağıdaki gibidir:

$$B_0^P = 1, \; B_1^P = -1, \; B_2^P = \frac{1}{2}, \; B_3^P = -\frac{1}{2}, \; B_4^P = \frac{2}{3}, \; B_5^P = -\frac{5}{4}.$$

İlk birkaç $B_n^P(x)$ Bernoulli-Padovan polinomları ve $B_{n,P}(x)$ Bernoulli P-polinomu ile klasik $B_n(x)$ Bernoulli polinomları arasındaki ilişkiyi Şekil 4.15'deki grafiklerde verilmektedir.



Şekil 4.15. $n = 1, 2, 3, 4$ için $B_{n,P}(x)$, $B_n^P(x)$ ve $B_n(x)$ grafikleri.

Önerme 4.9.1. $B_n^P(x)$ Bernoulli-Padovan polinomların *P*-türevi

$$D_P^x\left(B_n^P(x)\right)=P_n B_{n-1}^P(x)$$

şeklindedir.

İspat: (4.29) eşitliğinin her iki tarafın *P*-türevini alınırsa

$$D_P^x\left(\frac{te_P^{tx}}{e_P^t-1}\right)=D_P^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}B_n^P(x)\frac{t^n}{P_n!}\right)$$

$$\frac{tD_P^x\left(e_P^{tx}\right)}{e_P^t-1}=D_P^x\left(B_0^P(x)+B_1^P(x)\frac{t}{P_1!}+B_2^P(x)\frac{t^2}{P_2!}+\cdots\right)$$

elde edilir. Sol taraf (4.27) eşitliğinden hesaplanır. Sağ taraf için

$$D_P^x\left(B_0^P(x)\right)=D_P^x(1)=0$$

olduğu açıktır. Buradan,

$$t\frac{te_P^{tx}}{e_P^t-1}=\sum_{k=1}^{\infty}D_P^x\left(B_k^P(x)\right)\frac{t^k}{P_k!}$$

$$t\sum_{n=0}^{\infty}B_n^P(x)\frac{t^n}{P_n!}=\sum_{k=1}^{\infty}D_P^x\left(B_k^P(x)\right)\frac{t^k}{P_k!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n^P(x)\frac{t^{n+1}}{P_n!}=\sum_{k=1}^{\infty}D_P^x\left(B_k^P(x)\right)\frac{t^k}{P_k!}$$

ulaşılır. Eşitliğin sağ tarafında k yerine $n+1$ yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n^P(x)\frac{t^{n+1}}{P_n!}=\sum_{n=0}^{\infty}D_P^x\left(B_{n+1}^P(x)\right)\frac{t^{n+1}}{P_{n+1}!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n^P(x)\frac{t^{n+1}}{P_n!}=\sum_{n=0}^{\infty}D_P^x\left(B_{n+1}^P(x)\right)\frac{1}{P_{n+1}}\frac{t^{n+1}}{P_n!}$$

hesaplanır. Bu iki serinin eşitliğinden,

$$B_n^P(x)=\frac{D_P^x\left(B_{n+1}^P(x)\right)}{P_{n+1}}$$

elde edilir. Böylece, n yerine $n-1$ yazılırsa ispatın tamamlandığı görülür.

Önerme 4.9.2. Bernoulli-Padovan polinomları

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}_P B_k^P(x)=P_n x^{n-1},\ n\geq 1$$

eşitliği ile de hesaplanır.

İspat: (4.29) eşitliğinin her tarafını e_P^t ile çarpılırsa,

$$\frac{te_P^{tx}e_P^t}{e_P^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^P(x)e_P^t\frac{t^n}{P_n!}$$

elde edilir. Sonra (4.29) eşitliğinden çıkarılır ve

$$\begin{aligned}
\frac{te_P^{tx}}{e_P^t-1}\left(e_P^t-1\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(B_n^P(x)e_P^t-B_n^P(x)\right)\frac{t^n}{P_n!}\\
te_P^{tx}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(B_n^P(x)e_P^t-B_n^P(x)\right)\frac{t^n}{P_n!}\\
D_P^x\left(e_P^{tx}\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(B_n^P(x)e_P^t-B_n^P(x)\right)\frac{t^n}{P_n!}\\
D_P^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tx)^n}{P_n!}\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(B_n^P(x)e_P^t-B_n^P(x)\right)\frac{t^n}{P_n!}\\
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nD_P^x\left(x^n\right)}{P_n!}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(B_n^P(x)e_P^t-B_n^P(x)\right)\frac{t^n}{P_n!}\\
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nP_nx^{n-1}}{P_n!}&=\sum_{k=0}^{\infty}B_k^P(x)e_P^t\frac{t^k}{P_k!}-\sum_{n=0}^{\infty}B_n^P(x)\frac{t^n}{P_n!}.
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}B_k^P(x)e_P^t\frac{t^k}{P_k!}&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}B_k^P(x)\frac{t^l}{P_l!}.\frac{t^k}{P_k!}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}B_k^P(x)\frac{t^{l+k}}{P_l!P_k!}\\
l+k=n \text{ için}\quad &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{P_n!}\sum_{k=0}^{\infty}B_k^P(x)\frac{t^nP_n!}{P_{n-k}!P_k!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{P_n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^P(x)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n P_n x^{n-1}}{P_n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{P_n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_P B_k^P(x)\right)-\sum_{n=0}^{\infty}B_n^P(x)\frac{t^n}{P_n!}$$

elde edilir. Serilerin eşitliğinden;

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_P B_k^P(x)-B_n^P(x)=P_n x^{n-1}$$

sonucuna ulaşılır. Son eşitlik düzenlenirse,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}_P B_k^P(x)+\binom{n}{n}_P B_n^P(x)-B_n^P(x)=P_n x^{n-1}$$

yazılır. Böylece istenen eşitlik olan

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}_P B_k^P(x)=P_n x^{n-1}$$

elde edilir.

4.9.1. Pado-Pascal ve Pado-Bernoulli Matrisleri

Bu kısımda, Pado-Pascal ve Pado-Bernoulli matrisleri incelenmektedir. Çalışmadaki bulgular için $n\times n$ tipinde $PC_n=(c_{ij})$ Pascal matrisi

$$c_{ij}=\begin{cases}\binom{i-1}{j-1}, & \text{eğer } i\geq j,\\ 0, & \text{eğer } i<j.\end{cases}$$

şeklinde olduğu hatırlatalım. (Brawer ve Pirovino, 1992; Call ve Velleman, 1993).

Tanım 4.9.1.1. i, j ve n tamsayıları ve $1\leq i, j\leq n$ için $n\times n$ tipinde $PP_n[x]=(PP_n(x;i,j))$ Pado–Pascal matrisi,

$$PP_n(x;i,j)=\begin{cases}\binom{i-1}{j-1}_P x^{i-j}, & \text{eğer } i\geq j,\\ 0, & \text{eğer } i<j.\end{cases} \tag{4.31}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.9.1.1. $n=5$ için

$$PP_5[x]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 1 & 0 & 0 \\ x^3 & 2x^2 & 2x & 1 & 0 \\ x^4 & 2x^3 & 4x^2 & 2x & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Tanım 4.9.1.2. $n\geq 2$, $b_1=1$ ve $b_n=-\sum_{k=1}^{n-1} b_k \binom{n-1}{k-1}_P$ olmak üzere $PP_n^{-1}[x]=\left(PP_n^{-1}(x;i,j)\right)$ Pado-Pascal matrisin tersi,

$$PP_n^{-1}(x;i,j)=\begin{cases} b_{i-j+1}\binom{i-1}{j-1}_P x^{i-j}, & \text{eğer } i\geq j, \\ 0, & \text{eğer } i<j \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Örnek 4.9.1.2. $n=5$ için,

$$PP_5^{-1}[x]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & -2x & 1 & 0 \\ -x^4 & 2x^3 & 0 & -2x & 1 \end{bmatrix}$$

sonuca ulaşılır.

Tanım 4.9.1.3. $B_{n,P}(x)$ n. Bernoulli P-polinomu olsun. i,j ve n tamsayıları ve $1\leq i,j\leq n$ için $PB_n[x]=\left(PB_n(x;i,j)\right)$ Pado-Bernoulli matrisi ,

$$PB_n(x;i,j)=\begin{cases} \binom{i-1}{j-1}_P B_{i-j,P}(x), & \text{eğer } i\geq j, \\ 0, & \text{eğer } i<j. \end{cases} \tag{4.32}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.9.1.3. $n=5$ için,

$$PB_5[x]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x+1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2+x+\frac{1}{2} & x+1 & 1 & 0 & 0 \\ x^3+2x^2+x+\frac{1}{2} & 2x^2+2x+1 & 2x+2 & 1 & 0 \\ x^4+2x^3+2x^2+x+\frac{1}{3} & 2x^3+4x^2+2x+1 & 4x^2+4x+2 & 2x+2 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Tanım 4.9.1.4. n. Padovan sayısı P_n olsun. i,j ve n tamsayıları ve $1\le i,j\le n$ için $Q(P)=\left[p_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisi

$$p_{ij}=\begin{cases} \dfrac{1}{P_{i-j+1}}\dbinom{i-1}{j-1}_P, & \text{eğer } i\ge j, \\ 0, & \text{eğer } i<j \end{cases} \tag{4.33}$$

ile tanımlanır.

Örnek 4.9.1.4. $n=5$ için,

$$Q(P)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

sonuca ulaşılır.

Önerme 4.9.1.1. $\delta_{n,m}=\begin{cases} 1, & n=m \\ 0, & n\ne m \end{cases}$ Kronecker delta fonksiyonu ve her n pozitif tamsayısı olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_P B_{n-k}^P\frac{1}{P_{k+1}}=P_n!\,\delta_{n,0} \tag{4.34}$$

eşitliği doğrudur.

İspat: (4.24), (4.26) ve (4.28) eşitliklerinden faydalanarak,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_P B_{n-k}^P\frac{1}{P_{k+1}}=P_n!\,\delta_{n,0}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n!}{P_{n-k}!P_k!}B_{n-k}^P\frac{1}{P_{k+1}}=P_n!\delta_{n,0}$$

$$P_n!\sum_{k=0}^{n}\frac{B_{n-k}^P}{P_{n-k}!}\frac{1}{P_{k+1}!}=P_n!\delta_{n,0}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{B_{n-k}^P}{P_{n-k}!}\frac{1}{P_{k+1}!}=\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{n,0}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n^P}{P_n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{P_{n+1}!}=\delta_{0,0}+\delta_{1,0}+\cdots$$

$$\frac{1}{e_P-1}\left(e_P-1\right)=1$$

şeklinde kanıtlanır.

Teorem 4.9.1.1. n. Bernoulli-Padovan sayısı B_n^P olmak üzere $Q(P)=\left[p_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisinin tersi $Q^{-1}(P)=\left[q_{ij}\right]_{n\times n}$ olsun. Bu takdirde,

$$q_{ij}=\begin{cases}\binom{i-1}{j-1}_P B_{i-j}^P, & \text{eğer } i\geq j,\\ 0, & \text{eğer } i<j\end{cases}$$

dir.

İspat: (4.25), (4.33) ve (4.34) eşitliklerinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}\left(Q^{-1}(P)Q(P)\right)_{ij}&=\sum_{k=j}^{i}q_{ik}p_{kj}\\
&=\sum_{k=j}^{i}\binom{i-1}{k-1}_P B_{i-k}^P\frac{1}{P_{k-j+1}}\binom{k-1}{j-1}_P\\
&=\sum_{k=j}^{i}\binom{i-1}{j-1}_P\binom{i-j}{k-j}_P B_{i-k}^P\frac{1}{P_{k-j+1}}\\
&=\binom{i-1}{j-1}_P\sum_{k=0}^{i-j}\binom{i-j}{k}_P B_{i-j-k}^P\frac{1}{P_{k+1}}\\
&=\binom{i-1}{j-1}_P\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_P B_{n-k}^P\frac{1}{P_{k+1}}\\
&=\binom{i-1}{j-1}_P P_n!\delta_{n,0}\end{aligned}$$

sonuca ulaşılır. Buradan, $i=j$ için $\left(Q^{-1}(P)Q(P)\right)_{ij}=1$ ve $i\neq j$ için $\left(Q^{-1}(P)Q(P)\right)_{ij}=0$ dır.

Örnek 4.9.1.5. $n=5$ için,

$$Q^{-1}(P)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

sonucu elde edilir.

Teorem 4.9.1.2. $PB_n[x]$ Pado–Bernoulli matrisi ve $PP_n[x]$ genelleştirilmiş Pado–Pascal matrisi olsun. Bu takdirde,

$$PB_n[x]=PP_n[x]Q(P)$$

dir.

İspat: (4.25), (4.31), (4.32) ve (4.33) eşitliklerinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\left(PP_n[x]Q(P)\right)_{ij} &= \sum_{k=j}^{i} t_{ik}\,p_{kj} = \sum_{k=j}^{i} \binom{i-1}{k-1}_P x^{i-k} \frac{1}{P_{k-j+1}} \binom{k-1}{j-1}_P \\
&= \binom{i-1}{j-1}_P \sum_{k=0}^{i-j} \frac{1}{P_{k-j+1}} \binom{i-j}{k}_P x^{i-j-k} \\
&= \binom{i-1}{j-1}_P B_{i-j,P}(x) \\
&= \left(PB_n[x]\right)_{ij}
\end{aligned}$$

hedeflenen sonuca ulaşılır.

Örnek 4.9.1.6. $n=5$ için,

$$PP_5[x]Q(P)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 1 & 0 & 0 \\ x^3 & 2x^2 & 2x & 1 & 0 \\ x^4 & 2x^3 & 4x^2 & 2x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x+1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2+x+\frac{1}{2} & x+1 & 1 & 0 & 0 \\ x^3+2x^2+x+\frac{1}{2} & 2x^2+2x+1 & 2x+2 & 1 & 0 \\ x^4+2x^3+2x^2+x+\frac{1}{3} & 2x^3+4x^2+2x+1 & 4x^2+4x+2 & 2x+2 & 1 \end{bmatrix}=PB_n[x]$$

elde edilir.

4.10. Genelleştilmiş Padovan Polinom Matrisi ile Kriptolojik Şifreleme Sistemi

Haberleşme, varoluşumuzdan bu yana gerekli duyulan bir ihtiyaçtır. Medeniyetlerin oluşumundan bu yana güvenli bir haberleşme aktarımı birinci derecede önemlidir. Kriptografi, güvenli bir kanal üzerinden haberleşmemizin güvenliği, mahremiyeti ve gizliliği hakkında çalışan bir bilimdir. Bu çalışmanın amacı güvenlikten ödün vermeden anahtar üretimi için karmaşıklığı azaltan bir açık anahtar kriptografisini incelemek ve bu anahtarı kullanarak şifreleme sistemi oluşturmaktır.

Kumari ve Tanti tarafından sonlu bir F_p cismi üzerinde genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını içeren özyinelemeli blok matrislerini kullanan bir açık anahtar kriptografisi önerilmiştir. Bunun için, köşegen yerlerde multinacci matrisleri içeren bir üst üçgen matris türü olan multinacci blok matrisleri tanımlamışlar ve bazı cebirsel özelliklerini elde etmişler (Kumari ve Tanti, 2022).

Bu çalışmada, önce genelleştirilmiş Padovan polinom matrislerini kullanarak genelleştirilmiş Padovan blok polinom matrisleri tanımlanmış ve bazı özellikleri elde edilmiş, ardından anahtar değişimi için bir anahtar anlaşma yöntemi verilmiştir. Genişletilmiş Hill şifreleme ve affine şifreleme sisteminden ilham alınarak bir açık anahtar kriptografisi önerilmiş ve sonra oluşturulan anahtar değişimi ve şifreleme sistemi sayısal bir örnekle açıklanmıştır. Son olarak şifreleme sistemin analizi gerçekleştirilmiştir.

4.10.1. Genelleştirilmiş Padovan Polinom Blok Matrisleri

Bu kısımda, genelleştirilmiş Padovan polinom blok matris kripto sistemi için genelleştirilmiş Padovan polinom blok matrisi tanımlanmış ve gerekli bazı özdeşlikler verilmiştir.

Tanım 4.10.1.1. $n.$ mertebeden $\Re_n^{m_1}(x)$ ve $\Re_n^{m_2}(x)$ herhangi iki genelleştirilmiş Padovan polinom matrisleri ve $\kappa(x)$ aynı mertebeden herhangi bir kare matris olsun. Bu takdirde, genelleştirilmiş Padovan polinom blok matrisi

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Re_n^{m_1}(x) & \kappa(x) \\ 0 & \Re_n^{m_2}(x) \end{bmatrix}_{2n\times 2n} \tag{4.35}$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıdaki teorem, belirli bir örüntüyü izleyen genelleştirilmiş Padovan polinom matrisleri içeren Θ nın kuvvetleriyle ilgilidir.

Teorem 4.10.1.1. $k \in \mathbb{N}$ için

$$\Theta^k = \begin{bmatrix} \Re_n^{km_1}(x) & \kappa^k(x) \\ 0 & \Re_n^{km_2}(x) \end{bmatrix}_{2n\times 2n},$$

olmak üzere

$$\kappa^{k}(x)=\sum_{i=0}^{k-1}\left(\Re_{n}^{m_1}(x)\right)^{k-1-i}\kappa(x)\left(\Re_{n}^{m_2}(x)\right)^{i}$$

eşitliği doğrudur.

İspat: Tümevarım yöntemine göre kanıtı gerçekleştirelim. (4.35) eşitliğinden $k=1$ için doğru olduğu görülür. $k=r$ için doğru olsun. $k=r+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\Theta^{r+1}=\Theta^{r}\Theta=\begin{bmatrix}\Re_{n}^{rm_1}(x) & \kappa^{r}(x)\\ 0 & \Re_{n}^{rm_2}(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Re_{n}^{m_1}(x) & \kappa(x)\\ 0 & \Re_{n}^{m_2}(x)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\Re_{n}^{rm_1+m_1}(x) & \Re_{n}^{rm_1}(x)\kappa(x)+\kappa^{r}(x)\Re_{n}^{m_2}(x)\\ 0 & \Re_{n}^{rm_2+m_2}(x)\end{bmatrix}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}\Re_{n}^{rm_1}(x)\kappa(x)+\kappa^{r}(x)\Re_{n}^{m_2}(x)&=\Re_{n}^{rm_1}(x)\kappa(x)+\left[\sum_{i=0}^{r-1}\left(\Re_{n}^{m_1}(x)\right)^{r-1-i}\kappa(x)\left(\Re_{n}^{m_2}(x)\right)^{i}\right]\Re_{n}^{m_2}(x)\\&=\Re_{n}^{rm_1}(x)\kappa(x)+\left[\left(\Re_{n}^{m_1}(x)\right)^{r-1}\kappa(x)+\cdots+\kappa(x)\left(\Re_{n}^{m_2}(x)\right)^{r-1}\right]\Re_{n}^{m_2}(x)\\&=\Re_{n}^{rm_1}(x)\kappa(x)+\left(\Re_{n}^{m_1}(x)\right)^{r-1}\kappa(x)\Re_{n}^{m_2}(x)+\cdots+\kappa(x)\left(\Re_{n}^{m_2}(x)\right)^{r}\\&=\sum_{i=0}^{r}\left(\Re_{n}^{m_1}(x)\right)^{r-i}\kappa(x)\left(\Re_{n}^{m_2}(x)\right)^{i}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenen kanıtlanmış olur.

Bir matrisin kriptografide anahtar eleman olarak kullanılabilmesi için tersinir olması gerekir. Bir matris tersinir ise determinantı sıfırdan farklıdır. Aşağıdaki teoremde, genelleştirilmiş Padovan blok matrisinin tersinir olduğu kanıtlanmaktadır.

Teorem 4.10.1.2 $\Re_{n}^{m_1}(x)$ ve $\Re_{n}^{m_2}(x)$ herhangi iki genelleştirilmiş Padovan polinom matrisleri olsun. Bu takdirde, genelleştirilmiş Padovan blok matrisinin determinantı

$$|\Theta|=1$$

dir.

İspat: $\left|\Re_{n}^{m}(x)\right|=1$ olduğu bilinmektedir. Bu takdirde,

$$|\Theta|=\begin{vmatrix}\Re_{n}^{m_1}(x) & \kappa(x)\\ 0 & \Re_{n}^{m_2}(x)\end{vmatrix}=\left|\Re_{n}^{m_1}(x)\right|\left|\Re_{n}^{m_2}(x)\right|=1$$

elde edilir.

Böylece, genelleştirilmiş Padovan polinom blok matrisin tersi

$$\begin{pmatrix} \Re_n^{m_1}(x) & \kappa(x) \\ 0 & \Re_n^{m_2}(x) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \Re_n^{-m_1}(x) & -\Re_n^{-m_1}(x)\kappa(x)\Re_n^{-m_2}(x) \\ 0 & \Re_n^{-m_2}(x) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Çünkü,

$$\begin{pmatrix} \Re_n^{m_1}(x) & \kappa(x) \\ 0 & \Re_n^{m_2}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Re_n^{-m_1}(x) & -\Re_n^{-m_1}(x)\kappa(x)\Re_n^{-m_2}(x) \\ 0 & \Re_n^{-m_2}(x) \end{pmatrix} = I(x)$$

$$\begin{pmatrix} \Re_n^{-m_1}(x) & -\Re_n^{-m_1}(x)\kappa(x)\Re_n^{-m_2}(x) \\ 0 & \Re_n^{-m_2}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Re_n^{m_1}(x) & \kappa(x) \\ 0 & \Re_n^{m_2}(x) \end{pmatrix} = I(x)$$

dir.

Kriptolojik sistemde şifreleme ve şifre çözme için kullanılacak önemli bir özdeşlik şu şekildedir:

Önerme 4.10.1.1. $\Re_n^{m_1}(x)$, $\Re_n^{m_2}(x)$, $\Re_n^{m_3}(x)$, $\Re_n^{m_4}(x)$ genelleştirilmiş Padovan polinom matrisleri ve $\kappa^{(u)}(x)$, $\kappa^{(v)}(x)$ aynı martebeden kare polinom matrisleri olsun. Bu takdirde, sırasıyla

$$\left(\kappa^{(v)}(x)\right)^{(u)} = \sum_{i=0}^{u-1}\left(\Re_n^{m_1}(x)\right)^{u-1-i}\kappa^{(v)}(x)\left(\Re_n^{m_2}(x)\right)^{i},$$

$$\left(\kappa^{(u)}(x)\right)^{(v)} = \sum_{j=0}^{v-1}\left(\Re_n^{m_3}(x)\right)^{v-1-j}\kappa^{(u)}(x)\left(\Re_n^{m_4}(x)\right)^{j}$$

olacak şekilde

$$\begin{pmatrix} \Re_n^{m_1}(x) & \kappa^{(v)}(x) \\ 0 & \Re_n^{m_2}(x) \end{pmatrix}^{u} = \begin{pmatrix} \Re_n^{um_1}(x) & \left(\kappa^{(v)}(x)\right)^{(u)} \\ 0 & \Re_n^{um_2}(x) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \Re_n^{m_3}(x) & \kappa^{(u)}(x) \\ 0 & \Re_n^{m_4}(x) \end{pmatrix}^{v} = \begin{pmatrix} \Re_n^{vm_3}(x) & \left(\kappa^{(u)}(x)\right)^{(v)} \\ 0 & \Re_n^{vm_4}(x) \end{pmatrix}$$

ise

$$\left(\kappa^{(v)}(x)\right)^{(u)} = \left(\kappa^{(u)}(x)\right)^{(v)}$$

dir.

İspat. Genelleştirilmiş Padovan polinom matrislerinin değişme özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\left(\kappa^{(v)}(x)\right)^{(u)} &= \sum_{i=0}^{u-1}\left(\Re_n^{m_1}(x)\right)^{u-1-i}\kappa^{(v)}(x)\left(\Re_n^{m_2}(x)\right)^{i} \\
&= \sum_{i=0}^{u-1}\left(\Re_n^{m_1}(x)\right)^{u-1-i}\left(\sum_{j=0}^{v-1}\left(\Re_n^{m_3}(x)\right)^{v-1-j}\kappa(x)\left(\Re_n^{m_4}(x)\right)^{j}\right)\left(\Re_n^{m_2}(x)\right)^{i} \\
&= \sum_{i=0}^{u-1}\sum_{j=0}^{v-1}\left(\Re_n^{m_1}(x)\right)^{u-1-i}\left(\Re_n^{m_3}(x)\right)^{v-1-j}\kappa(x)\left(\Re_n^{m_4}(x)\right)^{j}\left(\Re_n^{m_2}(x)\right)^{i} \\
&= \sum_{j=0}^{v-1}\left(\Re_n^{m_3}(x)\right)^{v-1-j}\left(\sum_{i=0}^{u-1}\left(\Re_n^{m_1}(x)\right)^{u-1-i}\kappa(x)\left(\Re_n^{m_2}(x)\right)^{i}\right)\left(\Re_n^{m_4}(x)\right)^{j} \\
&= \sum_{j=0}^{v-1}\left(\Re_n^{m_3}(x)\right)^{v-1-j}\kappa^{(u)}(x)\left(\Re_n^{m_4}(x)\right)^{j} \\
&= \left(\kappa^{(u)}(x)\right)^{(v)}
\end{aligned}$$

sonuca ulaşılır.

4.10.2. Genelleştirilmiş Padovan Polinom Blok Matris Kripto Sistemi (GPPBM Kripto Sistemi)

GPPBM kripto sistemi için bir açık anahtar ve bir gizli anahtar şu şekilde oluşturulmaktadır:

A kişisi $GF(2^m)$ Galois cismi üzerinde $P(x)$ indirgenemez polinomu, $\Re_n^{m_1}(x)$, $\Re_n^{m_2}(x)$ genelleştirilmiş Padovan polinom matrislerini ve aynı mertebeden $\kappa(x)$ polinom matrisini seçerek $\Theta = \begin{bmatrix} \Re_n^{m_1}(x) & \kappa(x) \\ 0 & \Re_n^{m_2}(x) \end{bmatrix}$ genelleştirilmiş Padovan polinom blok matrisini oluşturur. Sonra, herhangi bir s doğal sayısı seçer ve $\kappa^{(s)}(x)$ anahtar elemanını şu şekilde hesaplar:

$$\kappa^{(s)}(x) = \sum_{i=0}^{s-1}\left(\Re_n^{m_1}(x)\right)^{s-1-i}\kappa(x)\left(\Re_n^{m_2}(x)\right)^{i}\left(\operatorname{mod} P(x)\right)$$

Burada, A kişisi $\left(P(x), \kappa(x), \kappa^{(s)}(x)\right)$ genel anahtarı ve $\left(\Re_n^{m_1}(x), \Re_n^{m_2}(x), s\right)$ gizli anahtarı türetir.

A kişisi ile B kişisi arasında bir iletişim olduğunu varsayalım. A kişisi hem genel anahtarı hem de gizli anahtarı bilirken B kişisi yalnızca genel anahtarı bilir. $\Omega = \left(\Omega_1(x)\Omega_2(x)\cdots\Omega_n(x)\right)$ açık metin ve $\mho = \left(\mho_1(x)\mho_2(x)\cdots\mho_n(x)\right)$ şifreli metin olsun. Burada açık metni şifrelerken anahtarın boyutuna göre eksik kalmaması adına açık metnin son kısmını ilk değerler ile tamamlanır. B kişisi A kişisi ile iletişim kurmak için ihtiyaç duyacağı adımlar aşağıdaki gibidir:

1. B kişisi $GF(2^m)$ Galois cismi üzerinde $\Re_n^{m_3}(x)$ ve $\Re_n^{m_4}(x)$ genelleştirilmiş Padovan polinom matrisleri ve aynı mertebeden $\kappa(x)$ polinom matrisi seçerek $\Xi=\begin{bmatrix}\Re_n^{m_3}(x) & \kappa(x)\\ 0 & \Re_n^{m_4}(x)\end{bmatrix}$ genelleştirilmiş Padovan polinom blok matrisini oluşturur. Ardından, herhangi bir t doğal sayısı seçer ve $\kappa^{(t)}(x)$ anahtar elemanını aşağıdaki gibi hesaplar:

$$\kappa^{(t)}(x)=\sum_{j=0}^{t-1}\left(\Re_n^{m_3}(x)\right)^{t-1-j}\kappa(x)\left(\Re_n^{m_4}(x)\right)^{j}\left(\operatorname{mod}P(x)\right).$$

2. B kişisi şifreleme anahtarını

$$E_\kappa=\left(\kappa^{(s)}(x)\right)^{(t)}=\sum_{j=0}^{t-1}\left(\Re_n^{m_3}(x)\right)^{t-1-j}\kappa^{(s)}(x)\left(\Re_n^{m_4}(x)\right)^{j}\left(\operatorname{mod}P(x)\right)$$

olarak hesaplar.

3. B kişisi son olarak *k.* sütunu E_κ'nin *k.* sütunundaki öğelerin toplamına eşit olan $GF(2^m)$ Galois cismi üzerinde n boyutunda bir Ψ satır vektörü oluşturur.

Böylece, B kişisi yukarıdaki verileri kullanarak aşağıdaki şifreleme yöntemini oluşturur:

$$\mho_k\equiv\Omega_k E_\kappa+\Psi\left(\operatorname{mod}P(x)\right)$$

Sonra, bu yöntemle $GF(2^m)$ Galois cismi üzerinde elde edilen $\mho$ şifreli metni ve $\kappa^{(t)}(x)$ anahtar elemanını A kişisine gönderir. A kişisi $\left(\kappa^{(t)}(x),\mho\right)$ verisini kullanarak açık metni kurtarmak için aşağıdaki prosedürleri yürütür:

1. A kişisi $\kappa^{(t)}(x)$ kullanarak E_κ şifreleme anahtarını aşağıdaki gibi hesaplar:

$$E_\kappa=\left(\kappa^{(t)}(x)\right)^{(s)}=\sum_{i=0}^{s-1}\left(\Re_n^{m_1}(x)\right)^{s-1-i}\kappa^{(t)}(x)\left(\Re_n^{m_2}(x)\right)^{i}\left(\operatorname{mod}P(x)\right).$$

2. Sonra şifreli metni çözmek için E_κ şifreleme anahtarının $D_\kappa=\left(E_\kappa\right)^{-1}$ tersini hesaplar.

Böylece A kişisi aşağıdaki şifre çözme yöntemini kullanarak şifreli metni çözer:

$$\Omega_k\equiv\left(\mho_k-\Psi\right)D_\kappa\left(\operatorname{mod}P(x)\right).$$

Aşağıdaki örnek ile bu kripto sistemin işleyişi gösterilmektedir.

Örnek 4.10.2.1. Şifrelenecek açık metin olarak "Selam" seçtiğimizi varsayalım. Ek 1'deki ASCII tablosunda "S-e-l-a-m" harflerine karşılık gelen onaltılık, ikili ve polinom değerleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{lllll}
\text{Harf} \rightarrow & \text{Onaltılık} \rightarrow & \text{ikili} & \rightarrow \text{Polinom} \\
\text{S} \rightarrow & 53 & \rightarrow 01010011 \rightarrow & x^6+x^4+x+1 \\
\text{e} \rightarrow & 65 & \rightarrow 01100101 \rightarrow & x^6+x^5+x^2+1 \\
\text{l} \rightarrow & 6C & \rightarrow 01101100 \rightarrow & x^6+x^5+x^3+x^2 \\
\text{a} \rightarrow & 61 & \rightarrow 01100001 \rightarrow & x^6+x^5+1 \\
\text{m} \rightarrow & 6D & \rightarrow 01101101 \rightarrow & x^6+x^5+x^3+x^2+1
\end{array}$$

A kişisi bir $GF(2^8)$ Galois cismi üzerinde $P(x)=x^8+x^5+x^3+x+1$ indirgenemez polinomu ve

$\Re_2^2(x)=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&x&0\\0&1&x\end{bmatrix}$, $\Re_2^4(x)=\begin{bmatrix}0&1&x\\x&x^2&1\\1&0&x^2\end{bmatrix}$, $\kappa(x)=\begin{bmatrix}0&x^3&0\\x^2+1&x+1&1\\x&x^2&0\end{bmatrix}$ olmak üzere

$M(x)=\begin{pmatrix}\Re_2^2(x)&\kappa(x)\\0&\Re_2^4(x)\end{pmatrix}$ genelleştirilmiş Padovan polinom blok matrisi seçer. Böylece, A kişisi

$s=2$, $m_1=2$, $m_2=4$, $n=2$ ve $m=8$ seçtiğinden dolayı $\kappa^{(2)}(x)$ anahtar elemanını şu şekilde hesaplar:

$$\begin{aligned}
\kappa^{(2)}(x) &= \sum_{i=0}^{1}\left(\Re_2^2(x)\right)^{1-i}\kappa(x)\left(\Re_2^4(x)\right)^{i}\left(\operatorname{mod} x^8+x^5+x^3+x+1\right) \\
&= \Re_2^2(x)\kappa(x)+\kappa(x)\Re_2^4(x)\left(\operatorname{mod} x^8+x^5+x^3+x+1\right) \\
&= \begin{bmatrix}0&0&1\\1&x&0\\0&1&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&x^3&0\\x^2+1&x+1&1\\x&x^2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&x^3&0\\x^2+1&x+1&1\\x&x^2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&x\\x&x^2&1\\1&0&x^2\end{bmatrix}\left(\operatorname{mod} x^8+x^5+x^3+x+1\right) \\
&= \begin{bmatrix}x&x^2&0\\x^3+x&x^3+x^2+x&x\\1&x^3+x+1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x^4&x^5&x^3\\x^2+x+1&x^3+1&x^3+x^2+1\\x^3&x^4+x&0\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}x^4+x&x^5+x^2&x^3\\x^2+x^2+1&x^2+x+1&x^3+x^2+x+1\\x^3+1&x^4+x^3+1&1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ayrıca, A kişisi genel anahtarı

$$\left(x^8+x^5+x^3+x+1,\begin{bmatrix}0 & x^3 & 0\\ x^2+1 & x+1 & 1\\ x & x^2 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x^4+x & x^5+x^2 & x^3\\ x^2+x^2+1 & x^2+x+1 & x^3+x^2+x+1\\ x^3+1 & x^4+x^3+1 & 1\end{bmatrix}\right)$$

ve gizli anahtarı

$$\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & x & 0\\ 0 & 1 & x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1 & x\\ x & x^2 & 1\\ 1 & 0 & x^2\end{bmatrix},2\right)$$

olarak üretir. Böylece, B kişisi aşağıdaki adımları izleyerek A kişisin genel anahtarını kullanıp şifreleme anahtarını oluşturur:

1. B kişisi $t=3$ ve $GF(2^8)$ Galois cismi üzerinde $\Re_2^3(x)=\begin{bmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & x\\ x & x^2 & 1\end{bmatrix}$, $\Re_2^5(x)=\begin{bmatrix}x & x^2 & 1\\ 1 & 0 & x^2\\ x^2 & x^3+1 & 0\end{bmatrix}$, olmak üzere $N(x)=\begin{pmatrix}\Re_2^3(x) & \kappa(x)\\ 0 & \Re_2^5(x)\end{pmatrix}$ genelleştirilmiş Padovan polinom blok matrisi seçer. B kişisi $t=3$, $m_3=3$, $m_4=5$, $r=2$ ve $m=8$ seçtiğinden dolayı, $\kappa^{(3)}(x)$ anahtar elemanını şu şekilde hesaplar:

$$\begin{aligned}
\kappa^{(3)}(x) &= \sum_{j=0}^{2}\left(\Re_2^3(x)\right)^{2-j}\kappa(x)\left(\Re_2^5(x)\right)^j\left(\operatorname{mod} x^8+x^5+x^3+x+1\right)\\
&= \Re_2^6(x)\kappa(x)+\Re_2^3(x)\kappa(x)\Re_2^5(x)+\kappa(x)\Re_2^{10}(x)\left(\operatorname{mod} x^8+x^5+x^3+x+1\right)\\
&== \begin{bmatrix}x^3 & x^4+x^3 & 0\\ x^5+x^3+x^2+1 & x^5+x^4+x^3+x+1 & x^3+1\\ x^2+x & x^5+x^3 & x^2\end{bmatrix}\\
&\quad+\begin{bmatrix}x^4+x & x^5+x^4+x^3+x & x^5+x^4+x\\ x^3+x^2+1 & x^3+x^2+1 & x^5+x^3+x^2+1\\ x^5+x^2 & x^6+x^5+x^4+x^3+x^2 & x^6+x^5+x^4+x^2+x\end{bmatrix}\\
&\quad+\begin{bmatrix}x^7+x^4 & x^5+x^3+x+1 & x^3\\ x^5+x+1 & x^6+x^5+x^4+x^2+1 & x^6+x^5+x^4+x^3+1\\ x^6 & x^7+x & x^5\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}x^7+x^3+x & x^3+1 & x^5+x^4+x^3+x\\ x+1 & x^6+x+1 & x^6+x^4+x^3+x^2+1\\ x^6+x^5+x & x^7+x^6+x^4+x^2+x & x^6+x^4+x\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. B kişisi şifreleme anahtarını

$$E_\kappa=\left(\kappa^{(2)}(x)\right)^{(3)}=\sum_{j=0}^{2}\left(\Re_n^3(x)\right)^{2-j}\kappa^{(2)}(x)\left(\Re_n^5(x)\right)^j\left(\operatorname{mod} x^8+x^5+x^3+x+1\right)$$
$$=\Re_2^6(x)\kappa^{(2)}(x)+\Re_2^3(x)\kappa^{(2)}(x)\Re_2^5(x)+\kappa^{(2)}(x)\Re_2^{10}(x)\left(\operatorname{mod} x^8+x^5+x^3+x+1\right)$$
$$=\begin{bmatrix} x^6+x^3+x & x^6+x^5+x^4+x^3 & x^7+x^3+x^2 \\ x^6+x^4+x^2+x+1 & x^7+x^5+x^3+x+1 & x^7+x^4+x^3+x \\ x^4+x & x^7+x+1 & x^7+x^3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplar.

3. B kişisi son olarak k.sütunu E_κ'nin k.sütunundaki öğelerin toplamına eşit olan $GF(2^m)$ Galois cismi üzerinde n boyutunda bir Ψ satır vektörünü aşağıdaki gibi oluşturur:

$$\Psi=\left[x^3+x^2+x+1 \quad x^6+x^4 \quad x^7+x^4+x^3+x^2+x\right]$$

Sonra, B kişisi yukarıdaki verileri kullanarak aşağıdaki şifreleme yöntemi

$$\mho_k\equiv\Omega_k E_\kappa+\Psi\left(\operatorname{mod} P(x)\right)$$

ile Ω açık metnini

$$\Omega=\left(\underbrace{\overbrace{x^6+x^4+x+1}^{S},\overbrace{x^6+x^5+x^2+1}^{e},\overbrace{x^6+x^5+x^3+x^2}^{l}}_{\Omega_1},\underbrace{\overbrace{x^6+x^5+1}^{a},\overbrace{x^6+x^5+x^3+x^2+1}^{m},\overbrace{x^6+x^4+x+1}^{S}}_{\Omega_2}\right)$$

aşağıdaki gibi şifreler:

$$\mho_1=\Omega_1 E_K+\Psi\left(\operatorname{mod} x^8+x^5+x^3+x+1\right)$$
$$=\left[x^6+x^4+x+1 \quad x^6+x^5+x^2+1 \quad x^6+x^5+x^3+x^2\right]$$
$$.\begin{bmatrix} x^6+x^3+x & x^6+x^5+x^4+x^3 & x^7+x^3+x^2 \\ x^6+x^4+x^2+x+1 & x^7+x^5+x^3+x+1 & x^7+x^4+x^3+x \\ x^4+x & x^7+x+1 & x^7+x^3 \end{bmatrix},$$
$$+\left[x^3+x^2+x+1 \quad x^6+x^4 \quad x^7+x^4+x^3+x^2+x\right]\left(\operatorname{mod} x^8+x^5+x^3+x+1\right)$$
$$=\left[x^6+x^3+x+1 \quad x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x+1 \quad x^3+x^2\right]$$

$$
\begin{aligned}
\mho_2 &= \Omega_2 E_K + \Psi\left(\operatorname{mod} x^8+x^5+x^3+x+1\right)\\
&= \left[x^6+x^5+1 \quad x^6+x^5+x^3+x^2+1 \quad x^6+x^4+x+1\right]\\
&\quad . \begin{bmatrix} x^6+x^3+x & x^6+x^5+x^4+x^3 & x^7+x^3+x^2 \\ x^6+x^4+x^2+x+1 & x^7+x^5+x^3+x+1 & x^7+x^4+x^3+x \\ x^4+x & x^7+x+1 & x^7+x^3 \end{bmatrix}\\
&\quad + \left[x^3+x^2+x+1 \quad x^6+x^4 \quad x^7+x^4+x^3+x^2+x\right]\left(\operatorname{mod} x^8+x^5+x^3+x+1\right)\\
&= \left[x^7+x^6+x^4+x^2+x \quad x^7+x^5+x \quad x^7+x^5+x^3+x\right]
\end{aligned}
$$

Böylece, B kişisi

$$
\mho = \left(\underbrace{\overbrace{x^6+x^3+x+1}^{K}, \overbrace{x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x+1}^{\hat{u}}, \overbrace{x^3+x^2}^{FF}}_{\mho_1}, \underbrace{\overbrace{x^7+x^6+x^4+1}^{\tilde{N}}, \overbrace{x^7+x^5+x}^{¢}, \overbrace{x^7+x^5}^{NBSP}}_{\mho_2} \right)
$$

ve $\kappa^{(3)}(x)$ anahtar elemanını A kişisine gönderir. A kişisi $\left(\kappa^{(3)}(x), \mho\right)$ verisini kullanarak açık metni kurtarmak için aşağıdaki prosedürleri yürütür:

1. Öncelikle A kişisi $\kappa^{(3)}(x)$ kullanarak E_κ şifreleme anahtarını aşağıdaki gibi hesaplar:

$$
\begin{aligned}
E_\kappa = \left(\kappa^{(3)}(x)\right)^{(2)} &= \sum_{i=0}^{1}\left(\Re_n^{m_1}(x)\right)^{1-i}\kappa^{(3)}(x)\left(\Re_n^{m_2}(x)\right)^{i}\left(\operatorname{mod} P(x)\right)\\
&= \Re_2^2(x)\kappa^{(3)}(x) + \kappa^{(3)}(x)\Re_2^4(x)\left(\operatorname{mod} x^8+x^5+x^3+x+1\right)\\
&= \begin{bmatrix} x^6+x^3+x & x^6+x^5+x^4+x^3 & x^7+x^3+x^2 \\ x^6+x^4+x^2+x+1 & x^7+x^5+x^3+x+1 & x^7+x^4+x^3+x \\ x^4+x & x^7+x+1 & x^7+x^3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

2. Sonra şifreli metni çözmek için E_κ şifreleme anahtarının tersini aşağıdaki gibi hesaplar:

$$
D_\kappa = \left(E_\kappa\right)^{-1} = \begin{bmatrix} x^4+x^3 & x^7+x^6+x^5+x^2+1 & x^7+x^2+x+1 \\ x^7+x^5+x^2+x & x^5+x^3+x & x^7+x^5+x \\ x^4+x^3+x & x^7+x^6+x^5+x^3+x^2+1 & x^6+x^5+x^4+x^2+x \end{bmatrix}
$$

Böylece A kişisi aşağıdaki şifre çözme yöntemini

$$\Omega_k \equiv \left(\mho_k - \Psi\right) D_\kappa \left(\operatorname{mod} P(x)\right)$$

kullanarak $\mho$ şifreli metnini

$$\mho = \left(\underbrace{\overbrace{x^6+x^3+x+1}^{K}, \overbrace{x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x+1}^{\hat{u}}, \overbrace{x^3+x^2}^{FF}}_{\mho_1}, \underbrace{\overbrace{x^7+x^6+x^4+1}^{\tilde{N}}, \overbrace{x^7+x^5+x}^{¢}, \overbrace{x^7+x^5}^{NBSP}}_{\mho_2} \right)$$

aşağıdaki şekilde çözümler:

.

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \left(\mho_1 - \Psi\right) D_\kappa \left(\operatorname{mod} x^8+x^5+x^3+x+1\right) \\
&= \begin{bmatrix} x^6+x^2 & x^7+x^5+x^3+x+1 & x^7+x^4 \end{bmatrix} \\
&\quad . \begin{bmatrix} x^4+x^3 & x^7+x^6+x^5+x^2+1 & x^7+x^2+x+1 \\ x^7+x^5+x^2+x & x^5+x^3+x & x^7+x^5+x \\ x^4+x^3+x & x^7+x^6+x^5+x^3+x^2+1 & x^6+x^5+x^4+x^2+x \end{bmatrix} \left(\operatorname{mod} x^8+x^5+x^3+x+1\right) \\
&= \begin{bmatrix} x^6+x^4+x+1 & x^6+x^5+x^2+1 & x^6+x^5+x^3+x^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_2 &= \left(\mho_2 - \Psi\right) D_\kappa \left(\operatorname{mod} x^8+x^5+x^3+x+1\right) \\
&= \begin{bmatrix} x^7+x^6+x^4+x^3+1 & x^7+x^6+x^5+x^4+x & x^5+x^4+x^2 \end{bmatrix} \\
&\quad . \begin{bmatrix} x^4+x^3 & x^7+x^6+x^5+x^2+1 & x^7+x^2+x+1 \\ x^7+x^5+x^2+x & x^5+x^3+x & x^7+x^5+x \\ x^4+x^3+x & x^7+x^6+x^5+x^3+x^2+1 & x^6+x^5+x^4+x^2+x \end{bmatrix} \left(\operatorname{mod} x^8+x^5+x^3+x+1\right) \\
&= \begin{bmatrix} x^6+x^5+1 & x^6+x^5+x^3+x^2+1 & x^6+x^4+x+1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4.10.3. Genelleştirilmiş Padovan Polinom Blok Matris Kripto Sistemi Analizi

Önerilen şifreleme sisteminin güvenilirlik gücü, göndericinin $\left(\Re_n^{m_1}(x), \Re_n^{m_2}(x), s\right)$ gizli anahtarı ve alıcının $\left(\Re_n^{m_3}(x), \Re_n^{m_4}(x), t\right)$ gizli anahtarını oluşturmak için gereken hesaplama gücü tarafından belirlenir. Şifreleme anahtarımızın formülü

$$E_\kappa = \left(\kappa^{(t)}(x)\right)^{(s)} = \sum_{i=0}^{s-1} \left(\Re_n^{m_1}(x)\right)^{s-1-i} \kappa^{(t)}(x) \left(\Re_n^{m_2}(x)\right)^{i} \left(\operatorname{mod} P(x)\right)$$

dir. Alıcı, $\left(\kappa^{(t)}(x),\mho\right)$ verisini güvenli olmayan bir kanal aracılığıyla göndericiye iletir. Bu nedenle, düşmanın $\left(\kappa^{(t)}(x),\mho\right)$ verisini yakalayabileceği varsayılmaktadır. Ancak $\left(\kappa^{(t)}(x),\mho\right)$ veri öğrendikten sonra, düşmanın $\left(\kappa^{(t)}(x)\right)^{(s)}$ şifreleme anahtarını hesaplamak için $\Re_n^{m_1}(x)$ ve $\Re_n^{m_2}(x)$ genelleştirilmiş Padovan polinom matrislerine ihtiyacı vardır. Şifreleme anahtarının kurtarılması, büyük dereceli indirgenemez polinomlar kullanılarak oluşturulan $\Re_n^{m_1}(x)$ ve $\Re_n^{m_2}(x)$ matrislerinin hesaplanmasına bağlıdır. Bu da neredeyse imkansızdır.

Anahtar uzayı, belirtilen parametrelere bağlı olarak $SL_n\left(GF(p^m)\right)$ matris teorisinde, p nin bir asal sayı olduğu sonlu cisim $GF(p^m)$ üzerinde $n\times n$ mertebesine sahip tersinir matrisler kümesini belirtir. Sonuç olarak, $SL_n\left(GF(p^m)\right)$ nin boyutu

$$\left|SL_n(GF(p^m))\right| = \frac{(p^{nm}-p^{(n-1)m})(p^{nm}-p^{(n-2)m})\cdots(p^{nm}-p^m)(p^{nm}-1)}{p^m-1}$$

dir. Anahtar uzayımızın gücünü analiz etmek için *Special Linear group* temel alan sonlu cisim $GF(p^m)$ üzerinde anahtar uzayın boyutunun ilk birkaç sonucu aşağıdaki tablolarda verilmektedir:

$p=2$ için

Tablo 4.6. $p=2$ için anahtar uzay boyutunun ilk birkaç terimi

m	$\left\|SL_3(GF(2^m))\right\|$	$\left\|SL_4(GF(2^m))\right\|$
1	168	20160
2	60480	987033600
3	2032128	34558531338240
4	4277145600	1148120010326016000
5	1098404364288	37740850586690833612800

$p=3$ için

Tablo 4.7. $p=3$ için anahtar uzay boyutunun ilk birkaç terimi

m	$\left\|GL_3(GF(3^m))\right\|$	$\left\|GL_4(GF(3^m))\right\|$
1	5616	12130560
2	42456960	203039372390400
3	282027786768	2950104711500722863360
4	1852734273062400	42384616454422610616987648000
5	12157458720650573616	608256444097010209814764297053292800

Yukarıdaki tablolardan p^m büyüdükçe kritik uzayın büyüme oranının oldukça yüksek olduğu görülebilir. Sonuç olarak, anahtar matrisinin boyutu n doğal sayısı m ile uyumlu bir şekilde artması durumunda, genelleştirilmiş Padovan polinom matrisleri kullanılarak elde edilen çok büyük bir anahtar uzayı ürettiği sonucuna varılmaktadır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Matematikte sayı dizileri birçok uygulama alanına sahiptir. Bu dizilerden biri üçüncü mertebeden yineleme bağıntısına sahip Padovan sayı dizisidir. Bu tezde, Padovan sayı dizisinin yeni genellemeleri ve uygulamaları araştırılmış ve aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

5.1. Sonuçlar

1. Padovan sayı dizisinin karakteristik denkleminin reel kökü plastik sabiti vermektedir. Plastik sabitin çeşitli uygulama alanları araştırılmış ve birçok sonuca varılmıştır.
2. Genelleştirilmiş Padovan polinom dizisinin tanımı verilmiş ve bu dizinin özel durumlardan bazıları olan Tridovan, Quadrovan ve Tetradovan polinom dizileri elde edilmiş ve bu dizilerin karakteristik denklemlerinin köklerine bağlı genel çözümleri, üreteç fonksiyonları ve çeşitli özdeşliklerine bakılmıştır. Ayrıca, genelleştirilmiş Padovan polinom matrisi ve tersi incelenmiştir.
3. Padovan toplam formülünden yola çıkılarak ağırlıklı Padovan toplamları için formüller elde edilmiştir.
4. Karakteristik denklemi, Fibonacci ve Padovan sayılarının karakteristik denklemlerinin çarpımı şeklinde olan beşinci mertebeden beşli Fibonacci-Padovan sayı dizisi tanımlanmış ve bazı özdeşlikleri verilmiştir.
5. Bi-periyodik Fibonacci sayı dizisinden yola çıkılarak bi-periyodik Padovan sayı dizisi tanımlanmış ve birkaç özdeşliğine bakılmıştır.
6. Titreşimli Padovan sayı dizileri ve genelleştirilmiş titreşimli Padovan sayı dizileri tanımlanmış ve tablolar üzerinde ilk birkaç terimi incelenmiştir. Ayrıca çeşitli özdeşlikler elde edilmiştir.
7. Satır ve sütun ilişkisi ile kurulu bir simetrik Padovan sayı dizisi tanımlanmış ve çeşitli özdeşlikler verilmiştir.
8. Padovan sayıları kullanılarak belirli kurullar doğrultusunda Pascal üçgenine benzer yeni bir üçgen oluşturulmuş ve Padovan üçgeni dizisi olarak adlandırılan yeni diziler tanımlanmıştır. Ayrıca, dizinin genel çözümü, üreteç fonksiyonları ve bazı özdeşlikleri incelenmiştir.
9. Bernoulli sayıları, polinomları ve üstel üreteç fonksiyonların tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir. Bernoulli P-sayıları ve polinomları, Bernoulli-Padovan sayıları ve polinomları, Pado-Bernoulli matrisi tanımlanmış ve bazı özdeşlikler kanıtlanmıştır.
10. Genelleştirilmiş Padovan polinom matrislerini kullanılarak genelleştirilmiş Padovan blok polinom matrisleri tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Anahtar değişimi için bir anahtar anlaşma yöntemi ile bir açık anahtar kriptografisi önerilmiş ve sistemin güvenirliği analiz edilmiştir.

5.2. Öneriler

Bu çalışmada, Padovan sayı dizisi için elde edilen bulguların çeşitli genellemeleri ve uygulamaları için bazı öneriler aşağıda verilmektedir:

1. Altın oran için elde edilen sonuçlar, plastik sabit için de benzer şekilde incelenebilir.
2. Genelleştirilmiş Padovan polinom dizisinin kompleks, kuaterniyon ve spinor gibi çeşitli konular ile ilişkisi kurulabilir.
3. Padovan toplam formülleri kullanılarak çeşitli toplam formülleri türetilebilir.
4. Beşli Fibonacci-Padovan sayı dizisinin genelleştirilmesi yapılabilir ve bu genelleştirmenin çeşitli özdeşlikleri incelenebilir.
5. Bi-periyodik Padovan sayı dizisinin matris dizisi tanımlanabilir ve bi-periyodik Padovan matris dizisinin çeşitli özdeşlikleri araştırılabilir.
6. Simetrik Padovan sayı dizisinin birçok genellemesi oluşturulabilir.
7. Titreşimli Padovan sayı dizisinin çeşitli konularla ilişkisi kurulabilir.
8. Padovan üçgen dizileri ve birçok özelliği genelleştirilebilir. Padovan üçgeni içinde gömülü özdeğerlerin, özvektörlerin, karakteristik polinomların, determinantların ve simetrik olmayan matrislerin normunun davranışı araştırılabilir.
9. Bernoulli P-polinomları, Euler Padovan sayıları, Euler-Padovan polinomları ve Bernoulli-Padovan sayıları için harmonik tabanlı P-üstel üreteç fonksiyon elde edilebilir ve bunların harmonik Padovan sayıları ve polinomları ile ilişkileri gösterilebilir.
10. Birçok özel sayı dizisinin matrisleri kullanılarak blok polinom matrisleri tanımlanabilir ve bazı özellikleri incelenebilir. Yeni bir kripto sistem önerilebilir ve sistemin güvenirliği analiz edilebilir.

KAYNAKLAR

Al-Salam, W. A. (1958). “q-Bernoulli numbers and polynomials.” Mathematische Nachrichten, Vol. 17, No. 3-6, pp. 239-260.

Alsina Català, C. (2007). El número de oro es plano:¡ pásalo!. Suma.

Allouche, J. P. and Johnson, T. (1996). “Narayana’s cows and delayed morphisms’ Cahiers du greyc.” Troisiemes Journées d’Informatique Musicale (JIM 96), pp. 4.

Anatriello, G. and Vincenzi, G. (2020). “Padovan-like sequences and generalized Pascal’s triangles.” An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi, Vol. 66, pp. 25-35.

Atanassov, K., Atanassova, V., Shannon, A. and Turner, J. (2002). New visual perspectives on Fibonacci numbers, World Scientific, New Jersey.

Atanassov, K. (2013a). “Pulsating Fibonacci sequences.” Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, Vol. 19, No. 3, pp. 12-14.

Atanassov, K. (2013b). “Pulsating Fibonacci sequences. part 2” Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, Vol. 19, No. 4, pp. 33-36.

Atanassov, K. (2014). “n-Pulsating Fibonacci sequences.” Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, Vol. 20, No. 1, pp. 32-35.

Bergum, G. E., Philippou, A. N. and Horadam, A. F. (1998). Applications of Fibonacci numbers, Springer, Netherlands.

Bicknell, M. (1970). “A primer for the Fibonacci numbers Part VII.” The Fibonacci Quarterly, Vol. 8, No. 4, pp. 407–420.

Brawer, R. and Pirovino, M. (1992). “The linear algebra of the Pascal matrix.” Linear Algebra and Its Applications, Vol. 174, pp. 13-23.

Call, G. S. and Velleman, D. J. (1993). “Pascal's matrices.” The American Mathematical Monthly, Vol. 100, No. 4, pp. 372-376.

Carlitz, L. (1948). “*q*-Bernoulli numbers and polynomials.” Duke Math. J., Vol. 15, pp. 987–1000.

Carlitz L. (1963). “Fibonacci arrays.” Fibonacci Quarterly, Vol. 1, No. 2, pp. 17-28.

Carlitz, L. (1968). “Bernoulli numbers.” Fibonacci Quarterly, Vol. 6, No. 1, 968.

Cerda-Morales, G. (2019). New Identities for Padovan Numbers on the arXiv preprint. 01 Haziran 2023 tarihinde https://arxiv.org/pdf/1904.05492.pdf adresinden erişildi.

Chandra, P. and Weisstein, E. W. (2023). Fibonacci number. 24 Mayıs 2023 tarihinde www.mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html adresinden erişildi.

Choo, Y. (2020). “Relations between generalized bi-Periodic Fibonacci and Lucas sequences.” Mathematics, Vol. 8, No. 9, 1527.

Clarke, R. J. (2003). “A formula for weighted Fibonacci sums.” The Mathematical Gazette, Vol. 87, No. 509, pp. 279-280.

Cloitre, B. (2002). Continued fraction expansion of smallest Pisot-Vijayaraghavan number on the On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. 06 Haziran 2023 tarihinde https://oeis.org/A000931 adresinden erişildi.

Coskun, A. and Taskara, N. (2016). “The matrix sequence in terms of bi-periodic Fibonacci numbers.” Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, Vol. 68, No. 2, pp. 1939-1949.

Coskun, A. and Taskara, N. (2018). “A note on the bi-periodic Fibonacci and Lucas matrix sequences.” Applied Mathematics and Computation, Vol. 320, pp. 400-406.

De Spinadel, Vera W. (1998). “The metallic means and design. Nexus II.” Architecture and Mathematics, Vol. 5, pp. 143-157.

De Spinadel, V. M. W. and Buitrago, A. R. (2009). “Towards Van der Laan’s plastic number in the plane.” Journal for Geometry and Graphics, Vol. 13, No. 2, pp. 163-175.

Deveci, O. and Karaduman, E. (2017). “On the Padovan *p*-numbers.” Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Vol. 46, No. 4, pp. 579-592.

Dişkaya, O. and Menken, H. (2019). “On the quadra Fibona-Pell and Hexa Fibona-Pell-Jacobsthal sequences.” Mathematical Sciences and Applications E-Notes, Vol. 7, No. 2, pp. 149-160.

Dişkaya, O. and Menken, H. (2020). “On the Padovan triangle.” Journal of Contemporary Applied Mathematics, Vol. 10, No. 2, pp. 66-76.

Dişkaya, O. and Menken, H. (2021). “Some properties of the plastic constant.” Journal of Science and Arts, Vol. 21, No. 4, pp. 883-894.

Dişkaya, O. and Menken, H. (2022). “On the Padovan arrays.” Bulletin of the International Mathematical Virtual Institüte, Vol. 12, No. 3, pp. 497-504.

Dişkaya, O. and Menken, H. (2023a). “On the quinary Fibonacci-Padovan sequences.” Creative Mathematics and Informatics, Vol. 32, No. 1, pp. 41-48.

Dişkaya, O. and Menken, H. (2023b). “Bernoulli-Padovan polynomials and Pado-Bernoulli matrices.” Maejo International Journal of Science & Technology, Vol. 17, No. 1, pp. 55-67.

Dunlap, R. A. (1997). The golden ratio and Fibonacci numbers, World Scientific.

Edson, M. and Yayenie, O. (2009). “A new generalization of Fibonacci sequence and extended Binet’s formula.” Integers, Vol. 9, No. 6, pp. 639–654.

Ernst, T. (2008). *q*-Pascal and *q*-Bernoulli matrices and umbral approach. Department of Mathematics Report, Uppsala Universty.

Ernst, T. (2018). “On several *q*-special matrices, including the *q*-Bernoulli and *q*-Euler matrices.” Linear Algebra Appl., Vol. 542, pp. 422–440.

Feinberg, M. (1963). “Fibonacci-Tribonacci.” The Fibonacci Quarterly, Vol. 1, No. 1, pp. 71-74.

Gattei, P. (1990). “The `inverse' differential equation.” Mathematical Spectrum, Vol. 23, pp. 127-131.

Gauthier, N. (1995). “Fibonacci sums of the type $\sum r^m F_m$.” The Mathematical Gazette, Vol. 79, No. 485, pp. 364-367.

Gogin, N. D. and Myllari, A. A. (2007). “The Fibonacci-Padovan sequence and MacWilliams transform matrices.” Programming and Computer Software, Vol. 33, No. 2, pp. 74-79.

Gogin, N. D. and Myllari, A. A. (2016). “Padovan-like sequences and Bell polynomials.” Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 125, pp. 168-177.

Goy, T. (2018). “Some families of identities for Padovan numbers.” In Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society, Vol. 21, No. 3, pp. 413-419.

Harman, C. J. (1981). “Complex Fibonacci numbers.” The Fibonacci Quarterly, Vol. 19, No. 1, pp. 82-86.

Hayes, R. A. (1970). Fibonacci and Lucas polynomials, PhD Thesis, Diss. San Jose State College.

Hoffman, N. (1974). “Pascal's triangle.” The Arithmetic Teacher, Vol. 21, No. 3, pp. 190-198.

Hoggatt, V. E. (1969). Fibonacci and Lucas numbers, Houghton Mifflin Company, Boston, USA.

Horadam, A. F. (1961). “A generalized Fibonacci sequence.” The American Mathematical Monthly, Vol. 68, No. 5, pp. 455-459.

Hosoya, H. (1976). “Fibonacci triangle.” Fibonacci Quarterly, Vol. 14, No. 2, pp. 173–278.

Infante, G. M., Ramirez, J. L. and Sahin, A. (2017). “Some results on q-analogue of the Bernoulli, Euler and Fibonacci matrices.” Math. Rep.(Bucur.), Vol. 19, No. 4, pp. 399-417.

Kızılateş, C. (2017). “On the quadra Lucas-Jacobsthal numbers.” Karaelmas Science and Engineering Journal, Vol. 7, No. 2, pp. 619-621.

King, C. H. (1960). Some properties of the Fibonacci numbers, Master’s Thesis, San Jose State College, San Jose, California, USA.

Klima, R. and Sigmon, N. (2018). Cryptology: classical and modern, CRC Press, Boca Raton, Florida, USA.

Koshy, T. (2001). Fibonacci and Lucas numbers with applications Vol. 1, John Wiley & Sons, USA.

Koshy, T. (2014). Pell and Pell-Lucas numbers with applications, Springer, New York, USA.

Koshy, T. (2019). Fibonacci and Lucas numbers with applications Vol. 2, John Wiley & Sons, USA.

Krot, E. (2004). “An introduction to finite fibonomial calculus.” Open Mathematics, Vol. 2, No. 5, pp. 754- 766.

Kumari, M. and Tanti, J. (2022). A public key cryptography using multinacci block matrices. 01 Haziran 2023 tarihinde https://arxiv.org/pdf/2003.08634.pdf adresinden erişildi.

Kuş, S., Tuglu, N. and Kim, T. (2019). “Bernoulli *F*-polynomials and Fibo–Bernoulli matrices.” Advances in Difference Equations, Vol. 2019, No. 1, pp. 1-16.

Lalin, M. N. (2005). “Bernoulli numbers.” Junior Number Theory SeminarUniversty of Texas at Austin September, 6th, pp. 1-10.

Larson, N. (2019). The Bernoulli numbers: a brief primer. 14 Haziran 2023 tarihinde www.whitman.edu/documents/Academics/Mathematics/2019/LarsonBalof.pdf adresinden erişildi.

Laura E. S. C. (1996). Sums of powers and the Bernoulli numbers. Eastern Illinois University.

Livio, M. (2008). The golden ratio: The story of phi, the world's most astonishing number, Broadway Books, New York, USA.

Lucas, E. (1876). Sur la recherche ́de grands nombres premiers, in A. F. Congre`sdu Clerment-Ferrand, pp. 61–68.

Lucas, E. (1891). Théorie des nombres Vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, France.

Marohnić, L. and Strmečki, T. (2012). Plastic number: Construction and applications. In International Virtual Conference ARSA (Advanced Researsch in Scientific Area).

Mollin, R. A. (2007). An introduction to cryptography. CRC Press, New York, USA.

Özkoç, A. (2015). “Some algebraic identities on quadra Fibona-Pell integer sequence.” Advances in Difference Equations, Vol. 148, No. 1, pp. 1-10.

Özvatan, M. (2018). Generalized golden-Fibonacci calculus and applications, Doktora Tezi, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, İzmir, Türkiye.

Paar, C. and Pelzl, J. (2009). Understanding cryptography: a textbook for students and practitioners. Springer Science & Business Media, New York, USA.

Padovan, R. (1994). Dom Hans Van der Laan: modern primitive, Amsterdam: Architectura & Natura Press.

Perrin, R. (1899). “Query 1484.” L’Interme´diaire des Math, Vol. 6, pp. 76–77.

Philippou, A. N. (1986). Fibonacci numbers and their applications, Springer Science & Business Media, Dordrecht, Holland.

Philippou, A. N., Horadam, A. F. and Bergum, G. E. (2013). Applications of Fibonacci numbers, Springer Science & Business Media, Media, Dordrecht, Holland.

Quinn, J. J. and Benjamin, A. T. (2003). Proofs that really count: The art of combinatorial proof, Association of America, Washington, D.C.

Ramírez, J. L. and Sirvent, V. F. (2015). “A note on the k-Narayana sequence.” Annales Mathematicae et Informaticae, Vol. 45, pp. 91-105.

Shannon, A. G., Anderson, P. G. and Horadam, A. F. (2006). “Properties of Cordonnier, Perrin and Van der Laan numbers.” International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 37, No. 7, pp. 825-831.

Sokhuma, K. (2013). “Padovan *q*-matrix and the generalized relations.” Applied Mathematical Sciences, Vol. 7, No. 56, pp. 2777-2780.

Spickerman, W. R. (1982). “Binet’s formula for the Tribonacci sequence.” Fibonacci Quarterly, Vol. 20, No. 2, pp. 118-120.

Stewart, I. (1996). “Tales of a neglected number.” Scientific American, No. 6, pp. 92-93.

Tan, E., Yilmaz, S. and Sahin, M. (2016). “A note on bi-periodic Fibonacci and Lucas quaternions.” Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 85, pp. 138-142.

Tan, E. and Leung, H. H. (2020). “Some basic properties of the generalized bi-periodic Fibonacci and Lucas sequences.” Advances in Difference Equations, Vol. 2020, No. 1, pp. 1-11.

Taş, S. and Karaduman, E. (2014). “The Padovan sequences in finite groups.” Chaing Mai J. Sci, Vol. 41, No. 2, pp. 456-462.

Taşçı, D. (2018). “Gaussian Padovan and gaussian Pell-Padovan sequences.” Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, Vol. 67, No. 2, pp. 82-88.

Taşçı, D. (2009). “On quadrapell numbers and quadrapell polynomials.” Hacet. J. Math. Stat., Vol. 38, No. 3, pp. 265-275.

Tattersall, J. J. (2005). Elementary number theory in nine chapters, University Press, Cambridge.

Uygun, S. and Owusu, E. (2016). “A new generalization of Jacobsthal numbers (bi-periodic Jacobsthal sequences).” Journal of Mathematical Analysis, Vol. 7, No. 5, pp. 28-39.

Vieira, R. P. M. and Alves, F. R. V. (2019). “Sequences of Tridovan and their identities.” Notes on number theory and discrete mathematics, Vol. 25, No. 3, pp. 185-197.

Vieira, R. P. M., Alves, F. R. V. and Catarino, P. M. M. C. (2020). “A historical analysis of the Padovan sequence.” International Journal of Trends in Mathematics Education Research, Vol. 3, No. 1, pp. 8-12.

Vorobiev, N. N. (2012). Fibonacci numbers, Birkhäuser, Basel.

Woods, D. R. (1979). Notes on introductory combinatorics. Computer Science Department, School of Humanities and Sciences, Standford University, Califomia.

Yılmaz, N. and Taskara, N. (2013). “Matrix sequences in terms of Padovan and Perrin numbers.” Journal of Applied Mathematics, Vol. 2013, pp. 7.

Yılmaz, N. and Taskara, N. (2014). “On the negatively subscripted Padovan and Perrin matrix sequences.” Communications in Mathematics and Applications, Vol. 5, No. 2, pp. 59-72.

Zhang, Z. and Whang, J. (2006). “Bernoulli matrix and its algebraic properties.” Discrete Applied Mathematics, Vol. 154, No. 11, pp. 1622–163.

EKLER

Ek 1: ASCII Tablosu

DEC	HEX	Binary	Symbol
0	00	00000000	NUL
1	01	00000001	SOH
2	02	00000010	STX
3	03	00000011	ETX
4	04	00000100	EOT
5	05	00000101	ENQ
6	06	00000110	ACK
7	07	00000111	BEL
8	08	00001000	BS
9	09	00001001	HT
10	0A	00001010	LF
11	0B	00001011	VT
12	0C	00001100	FF
13	0D	00001101	CR
14	0E	00001110	SO
15	0F	00001111	SI
16	10	00010000	DLE
17	11	00010001	DC1
18	12	00010010	DC2
19	13	00010011	DC3
20	14	00010100	DC4
21	15	00010101	NAK
22	16	00010110	SYN
23	17	00010111	ETB
24	18	00011000	CAN
25	19	00011001	EM
26	1A	00011010	SUB
27	1B	00011011	ESC
28	1C	00011100	FS
29	1D	00011101	GS
30	1E	00011110	RS
31	1F	00011111	US
32	20	00100000	SP
33	21	00100001	!
34	22	00100010	"
35	23	00100011	#
36	24	00100100	$
37	25	00100101	%
38	26	00100110	&
39	27	00100111	'
40	28	00101000	(
41	29	00101001	)
42	2A	00101010	*
43	2B	00101011	+
44	2C	00101100	,
45	2D	00101101	-
46	2E	00101110	.
47	2F	00101111	/
48	30	00110000	0
49	31	00110001	1

DEC	HEX	Binary	Symbol
85	55	01010101	U
86	56	01010110	V
87	57	01010111	W
88	58	01011000	X
89	59	01011001	Y
90	5A	01011010	Z
91	5B	01011011	[
92	5C	01011100	\
93	5D	01011101	]
94	5E	01011110	^
95	5F	01011111	_
96	60	01100000	`
97	61	01100001	a
98	62	01100010	b
99	63	01100011	c
100	64	01100100	d
101	65	01100101	e
102	66	01100110	f
103	67	01100111	g
104	68	01101000	h
105	69	01101001	i
106	6A	01101010	j
107	6B	01101011	k
108	6C	01101100	l
109	6D	01101101	m
110	6E	01101110	n
111	6F	01101111	o
112	70	01110000	p
113	71	01110001	q
114	72	01110010	r
115	73	01110011	s
116	74	01110100	t
117	75	01110101	u
118	76	01110110	v
119	77	01110111	w
120	78	01111000	x
121	79	01111001	y
122	7A	01111010	z
123	7B	01111011	{
124	7C	01111100	|
125	7D	01111101	}
126	7E	01111110	~
127	7F	01111111	DEL
128	80	10000000	€
129	81	10000001	
130	82	10000010	‚
131	83	10000011	ƒ
132	84	10000100	„
133	85	10000101	…
134	86	10000110	†

DEC	HEX	Binary	Symbol
170	AA	10101010	ª
171	AB	10101011	«
172	AC	10101100	¬
173	AD	10101101	SHY
174	AE	10101110	®
175	AF	10101111	¯
176	B0	10110000	°
177	B1	10110001	±
178	B2	10110010	²
179	B3	10110011	³
180	B4	10110100	´
181	B5	10110101	µ
182	B6	10110110	¶
183	B7	10110111	·
184	B8	10111000	¸
185	B9	10111001	¹
186	BA	10111010	º
187	BB	10111011	»
188	BC	10111100	¼
189	BD	10111101	½
190	BE	10111110	¾
191	BF	10111111	¿
192	C0	11000000	À
193	C1	11000001	Á
194	C2	11000010	Â
195	C3	11000011	Ã
196	C4	11000100	Ä
197	C5	11000101	Å
198	C6	11000110	Æ
199	C7	11000111	Ç
200	C8	11001000	È
201	C9	11001001	É
202	CA	11001010	Ê
203	CB	11001011	Ë
204	CC	11001100	Ì
205	CD	11001101	Í
206	CE	11001110	Î
207	CF	11001111	Ï
208	D0	11010000	Ð
209	D1	11010001	Ñ
210	D2	11010010	Ò
211	D3	11010011	Ó
212	D4	11010100	Ô
213	D5	11010101	Õ
214	D6	11010110	Ö
215	D7	11010111	×
216	D8	11011000	Ø
217	D9	11011001	Ù
218	DA	11011010	Ú
219	DB	11011011	Û

50	32	00110010	2
51	33	00110011	3
52	34	00110100	4
53	35	00110101	5
54	36	00110110	6
55	37	00110111	7
56	38	00111000	8
57	39	00111001	9
58	3A	00111010	:
59	3B	00111011	;
60	3C	00111100	<
61	3D	00111101	=
62	3E	00111110	>
63	3F	00111111	?
64	40	01000000	@
65	41	01000001	A
66	42	01000010	B
67	43	01000011	C
68	44	01000100	D
69	45	01000101	E
70	46	01000110	F
71	47	01000111	G
72	48	01001000	H
73	49	01001001	I
74	4A	01001010	J
75	4B	01001011	K
76	4C	01001100	L
77	4D	01001101	M
78	4E	01001110	N
79	4F	01001111	O
80	50	01010000	P
81	51	01010001	Q
82	52	01010010	R
83	53	01010011	S
84	54	01010100	T

135	87	10000111	‡
136	88	10001000	ˆ
137	89	10001001	‰
138	8A	10001010	Š
139	8B	10001011	‹
140	8C	10001100	Œ
141	8D	10001101	
142	8E	10001110	Ž
143	8F	10001111	
144	90	10010000	
145	91	10010001	‘
146	92	10010010	’
147	93	10010011	“
148	94	10010100	”
149	95	10010101	•
150	96	10010110	–
151	97	10010111	—
152	98	10011000	˜
153	99	10011001	™
154	9A	10011010	š
155	9B	10011011	›
156	9C	10011100	œ
157	9D	10011101	
158	9E	10011110	ž
159	9F	10011111	Ÿ
160	A0	10100000	NBSP
161	A1	10100001	¡
162	A2	10100010	¢
163	A3	10100011	£
164	A4	10100100	¤
165	A5	10100101	¥
166	A6	10100110	¦
167	A7	10100111	§
168	A8	10101000	¨
169	A9	10101001	©

220	DC	11011100	Ü
221	DD	11011101	Ý
222	DE	11011110	Þ
223	DF	11011111	ß
224	E0	11100000	à
225	E1	11100001	á
226	E2	11100010	â
227	E3	11100011	ã
228	E4	11100100	ä
229	E5	11100101	å
230	E6	11100110	æ
231	E7	11100111	ç
232	E8	11101000	è
233	E9	11101001	é
234	EA	11101010	ê
235	EB	11101011	ë
236	EC	11101100	ì
237	ED	11101101	í
238	EE	11101110	î
239	EF	11101111	ï
240	F0	11110000	ð
241	F1	11110001	ñ
242	F2	11110010	ò
243	F3	11110011	ó
244	F4	11110100	ô
245	F5	11110101	õ
246	F6	11110110	ö
247	F7	11110111	÷
248	F8	11111000	ø
249	F9	11111001	ù
250	FA	11111010	ú
251	FB	11111011	û
252	FC	11111100	ü
253	FD	11111101	ý
254	FE	11111110	þ
255	FF	11111111	ÿ

Ek 2:

m	Bazı İndirgenemez Polinomlar
1	$x+1,\ x$
2	x^2+x+1
3	$x^3+x+1,\ x^3+x^2+1$
4	$x^4+x^3+x^2+x+1,\ x^4+x^3+1,\ x^4+x+1$
5	$x^5+x^4+x^3+x^2+1,\ x^5+x^4+x^2+x+1,\ x^5+x^4+x^3+x+1,\ x^5+x^3+x^2+x+1,$
	$x^5+x^3+1,\ x^5+x^2+1$
6	$x^6+x^5+x^4+x+1, x^6+x^5+x^4+x^2+1, x^6+x^5+x^3+x^2+1, x^6+x^5+x^2+x+1,$
	$x^6+x^4+x^3+x+1, x^6+x^4+x^2+x+1, x^6+x^5+1, x^6+x^3+1, x^6+x+1,$
7	$x^7+x^6+x^5+x^4+1,\ x^7+x^5+x^4+x^3+1,\ x^7+x^6+x^5+x^2+1,\ x^7+x^6+x^4+x^2+1$
	$x^7+x^4+x^3+x^2+1,\ x^7+x^6+x^3+x+1,\ x^7+x^5+x^3+x+1,\ x^7+x^5+x^2+x+1$
	$x^7+x^3+x^2+x+1,\ x^7+x^6+1,\ x^7+x^4+1,\ x^7+x^3+1,\ x^7+x+1$
8	$x^8+x^4+x^3+x+1,\ x^8+x^7+x^2+x+1,\ x^8+x^5+x^3+x+1,\ x^8+x^6+x^5+x+1,$
	$x^8+x^7+x^5+x+1,\ x^8+x^7+x^6+x+1,\ x^8+x^4+x^3+x^2+1,\ x^8+x^5+x^3+x^2+1,$
	$x^8+x^6+x^3+x^2+1,\ x^8+x^7+x^3+x^2+1,\ x^8+x^6+x^5+x^2+1,\ x^8+x^5+x^4+x^3+1,$
	$x^8+x^6+x^5+x^3+1,\ x^8+x^7+x^5+x^3+1,\ x^8+x^6+x^5+x^4+1,\ x^8+x^7+x^5+x^4+1,$

ÖZGEÇMİŞ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
www.mersin.edu.tr