ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

MATRİS ORTOGONAL POLİNOMLARININ ve MATRİS FONKSİYONLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

Ali ÇEVİK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2009

ÖZET

Doktora Tezi

MATRİS ORTOGONAL POLİNOMLARININ ve MATRİS FONKSİYONLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

Ali ÇEVİK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Abdullah ALTIN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, önbilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar, lemmalar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Gamma, Beta ve hipergeometrik matris fonksiyonlarının tanımları verildikten sonra bazı özellikleri ve birbirleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. $F(A, B; C; z)$ hipergeometrik matris fonksiyonunun, hipergeometrik matris diferensiyel denkleminin bir çözümü olduğu gösterilmiş ve bu denklemin genel çözümü elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde Laguerre, Hermite ve Jacobi matris ortogonal polinom ailelerinin ikinci mertebeden bir matris diferensiyel denklemini sağladıkları, matris doğurucu fonksiyon, üç terimli matris rekürans bağıntısı, Rodrigues formülü özelliklerine sahip bulundukları incelenmiş ve de Laguerre matris polinomları ile Hermite matris polinomlarının bağlantısı verilmiştir.

Bu çalışmanın orijinal kısımları son bölümde verilmiştir. Bu bölümde, hipergeometrik matris fonksiyonunun integral gösterimi koşullar biraz daha genişletilerek verilmiştir. Ayrıca hipergeometrik matris fonksiyonlarının özelliklerini kullanarak bazı yeni sonuçlar elde edilmiş ve bu sonuçlar yardımıyla da Laguerre matris polinomları için yeni bağıntılar verilmiştir.

2009 , 119 sayfa
Anahtar Kelimeler: Ortogonal polinomlar, Gamma fonksiyonu, Beta fonksiyonu, hipergeometrik fonksiyon, matris, matris fonksiyonları, matris ortogonal polinomları, matris diferensiyel denklemi

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SOME PROPERTIES of MATRIX ORTHOGONAL POLYNOMIALS and MATRIX FUNCTIONS

Ali ÇEVİK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Abdullah ALTIN

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, preliminaries and some necessary definitions, lemmas and theorems that will be needed for later use are given.

In the third chapter, definitions of Gamma, Beta and hypergeometric matrix functions are given and then, the properties of these matrix functions and the relations between them are analysed. It is shown that hypergeometric matrix function $F(A, B; C; z)$ is a solution of hypergeometric matrix differential equation. Also the general solution of this equation is obtained.

In the fourth chapter, it is shown that families of Laguerre, Hermite and Jacobi orthogonal polynomials satify a matrix differential equation of the second order. Also some properties such as matrix generating function, three term matrix recurence relation, Rodrigues formula satisfied by these polynomials are examined. A connection between Laguerre matrix polynomials and Hermite matrix polynomials is given.

Original results of this thesis are given in the last chapter. Integral representation of hypergeometric matrix function is given under more general conditions. Also, by using properties of hypergeometric matrix functions, some new results are found and some new relations for Laguerre matrix polynomials are obtained by means of these new results.

2009 , 119 pages
Key Words: Orthogonal polynomials, Gamma function, Beta function, hypergeometric function, matrix, matrix functions, matrix orthogonal polynomials, matrix differential equation

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma imkanı sağlayan ve çalışmalarım süresince yakın ilgi ve desteğini hiç esirgemeyen Danışman Hocam Sayın Prof.Dr. Abdullah ALTIN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)'a en derin saygılarımı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca maddi ve manevi olarak her zaman yanımda olan aileme de saygı ve sevgilerimi sunarım.

Ali ÇEVİK
Ankara, Temmuz 2009

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^{r\times r}$	$r\times r$ boyutlu reel elemanlı karesel matrislerin uzayı
$\mathbb{C}^{r\times r}$	$r\times r$ boyutlu kompleks elemanlı karesel matrislerin uzayı
$P_n(t)$	$n.$ dereceden matris polinomu
$\mathcal{P}_r(t)$	$n\geq 0$ için katsayıları $\mathbb{C}^{r\times r}$ de olan bütün matris polinomlarının kümesi
$\sigma(A)$	A matrisinin tüm özdeğerlerinin kümesi ya da A matrisinin spektrumu
Q^H	$Q\in\mathbb{C}^{r\times r}$ matrisinin eşleniğinin transpozesi
$\Vert A\Vert$	A matrisinin matris $2-$normu
$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\frac{n}{2}$ sayısının tam değeri
O	bütün elemanları sıfır olan karesel matris
$\Gamma(P)$	Gamma matris fonksiyonu
$\mathbf{B}(P,Q)$	Beta matris fonksiyonu
$F(A,B;C;z)$	Hipergeometrik matris fonksiyonu
$L_n^{(A,\lambda)}(t)$	Laguerre matris polinomu
$H_n(x,A)$	Hermite matris polinomu
$P_n^{(A,B)}(x)$	Jacobi matris polinomu

1. GİRİŞ

Özel fonksiyonların önemli bir bölümünü oluşturan ortogonal polinomların, Matematik, Fizik, Astronomi ve İstatistikte önemli kullanım alanlarına sahip oldukları bilinmektedir. Ayrıca hipergometrik fonksiyonların özel halleri olan bir çok özel fonksiyon Fizik, Mühendislik ve Olasılık Teorisinde ortaya çıkar. Son yıllardaki, ortogonal polinomlar ile ilgili çalışmaların yoğun artışı, biortogonal ve katlı ortogonal polinomların da tanımlanarak bu konulardaki alan çalışmalarının genişletilmesine ve buna paralel olarak da bu konulara olan ilginin artmasına neden olmuştur.

Skaler durumdaki reel değişkenli klasik ortogonal polinom ailelerinin ikinci mertebeden bir diferensiyel denklemi sağladıkları, doğurucu fonksiyon, üç terimli rekürans bağıntısı, Rodrigues formülü ve norm özelliklerine sahip bulundukları bilinmektedir. Klasik ortogonal polinomlar tarafından sağlandığı bilinen bu özelliklerden hangileri ve hangi koşullar altında matris ortogonal polinomları için de geçerli olabilir?

Matris ortogonal polinomların ya da bir başka deyişle matris katsayılı ortogonal polinomların matematiksel özelliklerinde elde edilebilecek her türlü genişletmenin ve elde edilecek sonucun uygulama alanlarında da önemli bazı gelişmeler sağlayacağını beklemek doğaldır.

Matris polinomlarının uygulamaları istatistikte, gruplar teorisinde, saçılma teorisinde, diferensiyel denklemlerde, Fourier seri açılımlarında ve interpolasyonda sıklıkla kullanılmakta olduğundan devamlı büyüyen ve dinamik bir çalışma alanıdır. Ayrıca matris ortogonal polinomların tıbbi görüntülemede de kullanıldığı görülmektedir (Defez *et al.* 2000, 2002).

$A(t)$, $B(t)$ ve $C(t)$ matris değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$A(t)\,X''(t) + B(t)X'(t) + C(t)X(t) = O \tag{1.1}$$

tipindeki ikinci basamaktan diferensiyel denklem sistemleri Fizik, Kimya ve Mekanikte sık sık ortaya çıkar (Keller and Wolfe 1965, Morse and Fesbach 1953, Parter *et al.* 1973). Ayrıca, böyle sistemler kısmi türevli denklemleri çözmek için semi-diskrizasyon teknikleri uygulandığında da görülür (Rektorys 1982).

Tek matris argümentli özel fonksiyonların, simetrik uzaylarda küresel fonksiyonların çalışılmasında ve istatistikte çok değişkenli olasılık analizinde kullanıldığı görülmüştür (James 1975).

İki köşegen matris argümentli özel fonksiyonlar ilk olarak, "İki matris argümentli hipergeometrik fonksiyonlar için kısmi türevli denklemler" adlı çalışmada kullanılmıştır (Constantine and Muirhead 1972).

Matrislerden biri, birim matrisin skaler bir katı olan iki matris argümentli Beta fonksiyonu, matris ortogonal polinomlarının ve ikinci mertebeden diferensiyel denklem sistemlerinin verilmesinde kullanılmıştır (Jódar *et al.* 1995).

Bessel matris fonksiyonları ve bazı özellikleri Herz (1955) ve Jódar *et al.* (1992, 1994) tarafından verilmiştir. Laguerre, Hermite, Gegenbauer ve Jacobi matris polinom dizileri, son zamanlarda matris diferensiyel denklemlerin çalışılmasında ve Frobenius metodu ile ilişkisinde görülmüştür (Jódar *et al.* 1994, 1995).

Bu çalışmada, Gamma, Beta, hipergeometrik fonksiyon gibi özel fonksiyonların matris analoglarının yani matris fonksiyonlarının bazı özellikleri incelenmiştir. Bu bilgiler ışığında Laguerre, Hermite ve Jacobi matris ortogonal polinomlarının sınıfları ele alınmış ve bu matris polinomlarının hem kendilerinin sahip oldukları önemli özellikler, hem de farklı matris ortogonal polinom aileleri arasındaki ilişkiler üzerinde durulmuştur. Hipergeometrik matris fonksiyonu ve Laguerre matris polinomları için önemli bazı yeni bağıntılar elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖNBİLGİLER

Tanım 2.1 (**Polinom**) : *n bir doğal sayı ve $a_0, a_1, ..., a_n$ ler de $a_n \neq 0$ olmak üzere, sabit sayılar olsun.*

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

şeklinde tanımlanan $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir polinom *(çok terimli) denir.*

Buradaki n doğal sayısına *polinomun derecesi*, $a_0, a_1, ..., a_n$ sayılarına da *polinomun katsayıları* adı verilir. Eğer $a_n = 1$ ise $p_n(x)$ polinomuna *monik polinom* denir. x değişkeninin ve katsayıların reel ya da kompleks olmasına göre $p_n(x)$ polinomu reel polinom ya da kompleks polinom olarak adlandırılır.

Tanım 2.2 *$I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\omega(x)$, I da tanımlı pozitif bir fonksiyon olsun. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m \neq n$ olmak üzere,*

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_I \phi_m(x)\, \phi_n(x)\, \omega(x)\, dx = 0$$

sağlanıyorsa $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ polinom sistemine I aralığında $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir denir.

Uyarı 2.1 *Bu çalışmada bahsedilen tüm matrisler, aksi belirtilmedikçe $\mathbb{R}^{r \times r}$ uzayının elemanlarıdır.*

Tanım 2.3 (**Matris Polinomu**) : *t bir reel değişken ve $0 \leq j \leq n$ için $A_j \in \mathbb{C}^{r \times r}$ olmak üzere n. dereceden matris polinomu*

$$P_n(t) = A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + ... + A_1 t + A_0$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 2.2 *$n \geq 0$ için katsayıları $\mathbb{C}^{r \times r}$ de olan bütün matris polinomlarının kümesi $\mathcal{P}_r(t)$ ile gösterilir.*

Tanım 2.4 $\{\Omega\}_{n\geq 0}$, $\mathbb{C}^{r\times r}$ *deki matrislerin bir dizisi ve*

$$\mathcal{L} : \mathcal{P}_r(t) \rightarrow \mathbb{C}^{r\times r}$$

olmak üzere

$$\mathcal{L}(t^n I) = \Omega_n \quad ; \qquad n = 0, 1, ...$$

şeklinde tanımlansın. $0 \leq k \leq n$ *için* $A_k \in \mathbb{C}^{r\times r}$ *olmak üzere* $P_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k t^k$ *matris polinomu için*

$$\mathcal{L}(P_n(t)) = \sum_{k=0}^{n} A_k\, \Omega_k$$

sağlansın. Bu durumda $\{\Omega\}_{n\geq 0}$ *matris moment dizisi ile tanımlanan* $\mathcal{L}$, matris moment fonksiyoneli *olarak adlandırılır.* Ω_n *ise* n*. basamaktan* matris momenti*dir* (*Chihara 1978*).

Tanım 2.5 $n \geq 0$ *için* $P_n(t)$ *bir matris polinomu olmak üzere*

i. $P_n(t)$, *singüler olmayan başkatsayılı* n*. dereceden bir matris polinomudur,*

ii. $\forall n, s \in \mathbb{N}$ *ve* $n \neq s$ *için* $\mathcal{L}(P_n(t)\ P_s(t)) = O$ *dır,*

iii. $n \geq 0$ *için* $\mathcal{L}(P_n^2(t))$ *matrisinin tersi vardır,*

koşulları sağlansın. Bu takdirde $\{P_n(t)\}_{n\geq 0}$ *dizisine,* $\mathcal{L}$ *matris moment fonksiyoneline göre* matris ortogonal polinom *dizisi denir.*

2.1 Matris İşlemlerinde Bazı Özellikler

Tanım 2.6 I, *birim matrisi göstermek üzere* A, B, I *matrisleri için,*

$$AB = BA = I$$

eşitliğini sağlayan B *matrisine* A *matrisinin çarpma işlemine göre tersi* (inversi) *denir ve* $B = A^{-1}$ *ile gösterilir.*

Lemma 2.1 *Bir matrisin tersi var ise, bu ters tektir.*

İspat. Olmayana ergi metodunu kullanalım. Kabul edelim ki, tersi olan bir A matrisinin birbirinden farklı iki tersi B ve C olsun. Bu durumda,

$$AB = BA = I \tag{i}$$

$$AC = CA = I \tag{ii}$$

dir. Matrislerde çarpma işleminin birleşme özelliğini de gözönünde bulundurarak, (i) nin her iki yanı soldan C matrisi ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} C(AB) &= CI \\ (CA)B &= C \end{aligned}$$

olup (ii) den de yararlanarak

$$\begin{aligned} IB &= C \\ B &= C \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde bir matrisin tersi var ise, bu ters tektir. ■

Tanım 2.7 *Tersi olan matrislere* regüler (düzgün) matrisler *denir. Regüler (düzgün) olmayan matrislere ise,* singüler (tekil) matrisler *denir.*

Lemma 2.2 *A ve B regüler matrisler ise AB matrisi de regüler bir matris olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.*

İspat. A ve B regüler matrisler olduğundan

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= A^{-1}A = I \\ BB^{-1} &= B^{-1}B = I \\ (AB).(AB)^{-1} &= (AB)^{-1}.(AB) = I \end{aligned}$$

dır. Diğer yandan

$$(AB).\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right).(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

olup buradan

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = I$$

yazılabilir. Regüler bir matrisin tersi, tek olduğundan

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

dir. ■

Sonuç 2.1 *k herhangi bir pozitif tamsayı ve $A_1, ..., A_k$ lar regüler matrisler olmak üzere*

$$(A_1...A_k)^{-1} = A_k^{-1}...A_1^{-1}$$

dir.

Sonuç 2.2 *Regüler A matrisi için $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ dir.*

Lemma 2.3 *A herhangi matrisi ve B regüler matrisi için $AB = BA$ koşulu sağlanmak üzere $AB^{-1} = B^{-1}A$ dır.*

İspat. B regüler bir matris olduğundan tersi vardır. Bu durumda $AB = BA$ dan

$$ABB^{-1} = BAB^{-1} \Rightarrow A = BAB^{-1} \Rightarrow B^{-1}A = B^{-1}BAB^{-1} \Rightarrow B^{-1}A = AB^{-1}$$

olduğu görülür. ■

Lemma 2.4 *A matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin determinantının sıfırdan farklı yani,* $\det A = |A| \neq 0$ *olmasıdır.*

O halde, A matrisine, $\det A \neq 0$ ise *regüler* (*düzgün*) *matris*, $\det A = 0$ ise *singüler* (*tekil*) *matris* denir.

Lemma 2.5 *A ve B matrisleri için $|AB| = |A|\ |B|$ dir. Ayrıca $|AB| = 0$ ise $|A|$ veya $|B|$ den en az biri sıfır olmalıdır.*

Tanım 2.8 *x sıfırdan farklı $r \times 1$ boyutlu bir vektör ve O, sıfır matrisi olmak üzere*

$$Ax = \lambda x \quad \textit{ya da} \quad (A - \lambda I)\, x = O$$

eşitliğini sağlayan λ değerlerine, A matrisinin özdeğerleri denir.

Başka bir deyişle, A matrisinin özdeğerleri, λ ya göre r. dereceden bir denklem olan

$$|A - \lambda I| = 0$$

şeklindeki A matrisinin karakteristik denkleminin kökleridir.

Herbir λ özdeğerine karşılık gelen x vektörlerine de A matrisinin özvektörleri denir. A matrisinin tüm özdeğerlerinin kümesi $\sigma(A)$ ile gösterilir ve $\sigma(A)$ ya A nın spektrumu da denir.

Lemma 2.6 *A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ olmak üzere A matrisinin determinantı,* $\det A = |A| = \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_r$ *ile verilir.*

Tanım 2.9 *A matrisi için*

$$A^T = A^{-1}$$

eşitliği sağlanıyorsa, A matrisine ortogonal matris *denir.*

Tanım 2.10 *$\forall z \in \sigma(P)$ için* $\operatorname{Re}(z) > 0$ *koşulunu sağlayan $P \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisine* pozitif kararlı matris *denir (Jódar and Cortés 1998a).*

Tanım 2.11 *$Q \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisinin eşlenik transpozesi Q^H ile gösterilmek üzere*

$$Q^H Q = Q\ Q^H = I$$

eşitliğini sağlayan Q regüler matrisine üniter matris *denir.*

Tanım 2.12 *Herhangi P ve Q matrisleri için, $R^{-1} P R = Q$ olacak şekilde regüler bir R matrisi varsa, P ve Q matrislerine* benzer matrisler *denir.*

Regüler benzer matrislerin tersleri de benzerdir. Ayrıca benzer matrislerin determinantları ve özdeğerleri aynıdır.

Tanım 2.13 *Köşegen bir matrise benzer olan P matrisine,* köşegenleştirilebilir matris *denir.*

Bir P matrisinin köşegenleştirilebilir olması için $r-$tane lineer bağımsız özvektöre sahip olması gerek ve yeterdir. Bu durumda, köşegen matrisin köşegen elemanları P matrisinin özdeğerleridir.

Tanım 2.14 *Köşegenleştirilebilir P ve Q matrisleri için*

$$S^{-1} P S = D \quad , \quad S^{-1} Q S = E \quad ; \quad D, E \ \textit{köşegen matrisler}$$

olacak şekilde regüler bir S matrisi varsa, P ve Q matrislerine aynı anda köşegenleştirilebilir matrisler *denir (Horn and Johnson 1993).*

Lemma 2.7 *P ve Q köşegenleştirebilir matrisler olsun. P ve Q matrislerinin aynı anda köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul, bu matrislerin çarpma işlemine göre değişmeli olmasıdır (Horn and Johnson 1993).*

Tanım 2.15 *$p \geq 1$ ve $x^T = (x_1, ..., x_r)$ olmak üzere x vektörünün $p-$normu, $\| x \|_p = (|x_1|^p + ... + |x_r|^p)^{\frac{1}{p}}$ şeklinde tanımlanır (Golub and Van Loan 1983).*

Tanım 2.16 *x sıfırdan farklı $r \times 1$ boyutlu bir vektör olmak üzere, A matrisinin $p-$normu*

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq O} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

ya da bir başka deyişle

$$\|A\|_p = \max_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$$

şeklinde tanımlıdır (Golub and Van Loan 1983).

Lemma 2.8 *I birim matris, O sıfır matrisi, $c \in \mathbb{R}$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, herhangi A, B matrislerinin $p-$normu için aşağıdaki özellikler sağlanır. (Golub and Van Loan 1983).*

a) $\|A\|_p \geq 0$ ***c)*** $\|A\|_p = 0 \Leftrightarrow A = O$ ***e)*** $\|A + B\|_p \leq \|A\|_p + \|B\|_p$

b) $\|I\|_p = 1$ ***d)*** $\|cA\|_p = |c| \, \|A\|_p$ ***f)*** $\|AB\|_p \leq \|A\|_p \, \|B\|_p$

Uyarı 2.3 *Lemma 2.8.f deki özellik her matris normu için geçerli değildir. Örneğin*

$$\|A\|_{\triangle} = \max \ |a_{ij}| \qquad ve \qquad A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\|AB\|_{\triangle} > \|A\|_{\triangle} \, \|B\|_{\triangle}$$

şeklindedir. Fakat burada bahsedilen yerlerde bu eşitsizlik geçerlidir.

Tanım 2.17 *Bir A matrisi için Frobenius normu, $1-$normu ve $\infty-$normu sırasıyla*

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{r} |a_{ij}|^2} \quad , \qquad \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq r} \sum_{i=1}^{r} |a_{ij}| \qquad ve \qquad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq r} \sum_{j=1}^{r} |a_{ij}|$$

şeklinde tanımlıdır (Golub and Van Loan 1983).

Frobenius normunun ve $p-$normunun (özellikle $p = 1, 2, \infty$ için) sağladığı ve matris hesaplamalarının analizinde sıklıkla kullanılan belirli bazı eşitsizlikler

$$\left.\begin{array}{l} \|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{r}\,\|A\|_2 \\ \\ \max\limits_{i,j} |a_{ij}| \leq \|A\|_2 \leq r \max\limits_{i,j} |a_{ij}| \\ \\ \frac{1}{\sqrt{r}}\,\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{r}\,\|A\|_\infty \\ \\ \frac{1}{\sqrt{r}}\,\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{r}\,\|A\|_1 \\ \\ \|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1\,\|A\|_\infty} \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

şeklindedir (Golub and Van Loan 1983).

Teorem 2.1 *$\mu = \|A\|_2$ olmak üzere $A^T Az = \mu^2 z$ sağlanacak şekilde bir, birim $2-$normlu z vektörü vardır (Golub and Van Loan 1983).*

Uyarı 2.4 *Yukarıdaki teoremden görülmektedir ki; $\|A\|_2^2$, $p(\lambda) = \det\left(A^T A - \lambda I\right)$ polinomunun bir sıfırıdır. Matris $2-$normunun hesabı, matris $1-$normu ve $\infty-$normunun hesabında göre oldukça karmaşık ve zordur. Eğer en iyi şekilde tahmin etmek, belirlemek istenirse* (2.1) *eşitsizliklerinden yararlanılabilir.*

Çalışma boyunca, vektörler için vektör $2-$normu (Öklid normu), matrisler için matris $2-$normu kullanılacaktır.

Özel olarak, A matrisinin matris $2-$normu (*spektral normu*), $A^T A$ matrisinin en büyük özdeğerinin mutlak değerinin karekökü olarak alınacak ve $\|A\|$ ile gösterilecektir. Eğer A matrisi kompleks elemanlı ise A^T yerine A nın eşlenik transpozesi olan A^H alınacaktır.

Lemma 2.9 ***(Schur Ayrışımı):*** *$A \in \mathbb{C}^{r\times r}$ için D, A matrisinin özdeğerlerini esas köşegeni üzerinde bulunduran köşegen bir matris ve N tam üst üçgensel bir matris olmak üzere,*

$$Q^H AQ = D + N$$

olacak şekilde bir Q üniter matrisi vardır (Golub and Van Loan 1983).

Tanım 2.18 *$P \in \mathbb{C}^{r\times r}$ matrisi için*

$$\alpha(P) = \max\{\mathrm{Re}(z) : z \in \sigma(P)\} \quad ve \quad \beta(P) = \min\{\mathrm{Re}(z) : z \in \sigma(P)\}$$

ile tanımlanır.

Lemma 2.10 *A matrisinin Schur ayrışımı $Q^H AQ = D + N$ olmak üzere*

$$\left\|e^{At}\right\| \leq e^{\alpha(A)t} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\|Nt\|^j}{j!} \quad , \quad t \geq 0$$

dır (Golub and Van Loan 1983).

Lemma 2.11 *$P \in \mathbb{C}^{r\times r}$ ve $t \geq 0$ olmak üzere*

$$\left\|e^{Pt}\right\| \leq e^{\alpha(P)t} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\left(\|P\| \sqrt{r}t\right)^j}{j!}$$

dir (Golub and Van Loan 1989).

Tanım 2.19 *α reel ya da kompleks bir sayı ve n pozitif bir tamsayı olmak üzere $(\alpha)_n$ ifadesi*

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n-1) \ ; \quad (\alpha)_0 = 1 \tag{2.2}$$

olarak tanımlanır ve Pochhammer sembolü *olarak bilinir.*

Ayrıca, $(\alpha)_n$ ifadesine,

$$(\alpha)_n = \frac{(\alpha+n-1)!}{(\alpha-1)!} \ , \quad n \geq 1 \quad ; \quad (\alpha)_0 = 1$$

şeklinde de gösterilebildiğinden dolayı yükselen faktöriyel *de denilmektedir.*

Tanım 2.20 *Skaler Pochhammer ifadesine fonksiyonel matris hesabının uygulanmasıyla, $\mathbb{C}^{r\times r}$ deki herhangi bir C matrisi için*

$$(C)_n = C\ (C+I)\ldots(C+(n-1)I) \ , \ n \geq 1 \quad ; \quad (C)_0 = I \tag{2.3}$$

elde edilir ki, buna matrisler için Pochhammer gösterimi *denir.*

Uyarı 2.5 *j pozitif bir tamsayı olmak üzere $n > j$ için $(-jI)_n = O$ dır.*

Lemma 2.12 *Herhangi bir A matrisi için*

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n t^n}{n!} + \cdots$$

ile tanımlanan üstel matris serisi her t için yakınsaktır.

$t = 1$ için A nın üstel matrisi

$$e^{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$$

şeklindedir.

Lemma 2.13 *A, B, I ve O matrisleri için*

i) $e^O = I$,

ii) *e^A üstel matrisi her zaman regüler olup $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$,*

iii) *$AB = BA$ ise $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$,*

iv) *$t \in \mathbb{R}$ için $Ie^t = e^{It}$,*

eşitlikleri geçerlidir.

Lemma 2.14 *Eğer $f(z)$ ve $g(z)$, z kompleks değişkeninin kompleks düzlemin Ω açık kümesinde tanımlı analitik fonksiyonları iseler $\sigma(P) \subset \Omega$ olacak şekilde bir $P \in \mathbb{C}^{r\times r}$ matrisi için fonksiyonel matris hesabının özelliklerinden*

$$f(P)\, g(P) = g(P)\, f(P) \tag{2.4}$$

dir.

Eğer $\sigma(Q) \subset \Omega$ olacak şekildeki bir $Q \in \mathbb{C}^{r\times r}$ matrisi için $PQ = QP$ ise bu durumda

$$f(P)\, g(Q) = g(Q)\, f(P)$$

dir (Dunford and Schwartz 1957).

Lemma 2.15 *Eğer $f(P)$ iyi tanımlı bir matris fonksiyonu ve S, $\mathbb{C}^{r\times r}$ de regüler bir matris ise*

$$f\left(SPS^{-1}\right) = S\; f(P)\; S^{-1} \tag{2.5}$$

dir (Golub and Van Loan 1989).

Lemma 2.16 *$b, y \in \mathbb{C}$ ve $|y| < 1$ olmak üzere $(1-y)^b = \exp[b\ln(1-y)]$ dir. Ayrıca*

$$(1-y)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} y^n \ ; \quad |y| < 1 \ , \ \ a \in \mathbb{C}$$

olup fonksiyonel matris hesabının özelliklerinden $A \in \mathbb{C}^{r\times r}$ için

$$(1-y)^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)_n}{n!} y^n \ , \quad |y| < 1 \tag{2.6}$$

dir.

Tanım 2.21 *$B(z_0, r)$, kompleks düzlemdeki z_0 merkezli r yarıçaplı açık diski ve E ise $\mathbb{C}^{r\times r}$ sınıfından matrislerin Banach uzayını göstermek üzere, $1 \le i \le 4$ için $f_i : B(z_0, r) \to E$ şeklinde tanımlanan f_i ler sınırlı ve sürekli fonksiyonlar olsun. U_1 ve U_2 ise*

$$X'' = f_1(z)X' + f_2(z)Xf_3(z) + X'f_4(z) \tag{2.7}$$

denkleminin herhangi iki çözümü olsun. $P, Q \in \mathbb{C}^{r\times r}$ olmak üzere, (2.7) *denkleminin her U çözümü*

$$U(z) = U_1(z)P + U_2(z)Q \quad , \qquad z \in B(z_0, r)$$

şeklinde tek bir şekilde ifade edilebiliyorsa $\{U_1, U_2\}$ kümesine $B(z_0, r)$ de (2.7) *denkleminin* temel çözümler cümlesi *denir.*

Teorem 2.2 *Eğer* (2.7) *denkleminin $B(z_0, r)$ deki $\{U_1, U_2\}$ çözüm çifti için*

$$W(U_1, U_2, z_0) = \begin{bmatrix} U_1(z_0) & U_2(z_0) \\ U_1'(z_0) & U_2'(z_0) \end{bmatrix}$$

şeklindeki $W \in \mathbb{C}^{2r\times 2r}$ matrisi regüler (düzgün) *ise $\{U_1, U_2\}$ ye $B(z_0, r)$ de* (2.7) *denkleminin temel çözümler cümlesi denir (Jódar and Cortés 2000).*

2.2 Gamma ve Beta Fonksiyonları

I. Gamma Fonksiyonu

$\Gamma(x)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Bu fonksiyona *genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu* da denir. Şöyle ki,

$$F(u) = \int_0^\infty e^{-ut}\,dt = \frac{1}{u} \tag{2.8}$$

integrali ile tanımlanan fonksiyonu ele alalım. $c > 0$ olmak üzere bu integral her $c \leq u \leq d$ sonlu aralığında $\frac{1}{u}$ ya düzgün yakınsaktır. (2.8) eşitliğinden u ya göre türevler alarak devam ettiğimizde $n-$yinci türev için

$$(-1)^n F^{(n)}(u) = \int_0^\infty t^n e^{-ut}\,dt = \frac{n!}{u^{n+1}}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte $u = 1$ alınırsa;

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = n! = \int_0^\infty t^{(n+1)-1} e^{-t}\,dt = \Gamma(n+1)$$

olur. Burada n değerleri pozitif tamsayılar olarak alınmıştır. Halbuki n nin $n > -1$ olan herhangi bir reel sayı olması halinde de bu genelleştirilmiş integral tanımlıdır. Yani yakınsaktır. O halde $x > -1$ olan herhangi bir reel sayı olmak üzere;

$$x! = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = \Gamma(x+1)$$

yazılabilir. Buradan görülüyor ki, -1 den büyük olan tüm reel sayıların faktöriyel değerlerini sonlu bir reel sayı olarak tanımlamak mümkündür. Bundan dolayı Gamma fonksiyonu *genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu* olarak da adlandırılır.

$x = 0$ olduğu zaman faktöriyel fonksiyonunun değeri,

$$0! = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = -(0-1) = 1$$

dir. Bu sonuç 0! in neden 1 olarak tanımlanması gerektiğini açıklar.

Elemanter matematikte n faktöriyel, $n! = n(n-1)(n-2)...3.2.1$ çarpımı ile verilir. Bu özellik, $n! = n(n-1)!$ eşitliğini içerdiğine göre, eğer $x = n$ bir tamsayı ise,

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n)$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b t^x e^{-t}\,dt \\ &= \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left(-t^x e^{-t}\right)\Big|_0^b}_{0} + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

olduğundan Γ fonksiyonu,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{2.9}$$

eşitliğini tüm $x > 0$ değerleri için gerçekler. Bu özellik yardımıyla Gamma fonksiyonu için, argümentin herhangi iki tamsayı arasındaki değerlerine karşılık gelen sonuçların bilinmesi halinde diğer aralıklardaki fonksiyon değerleri kolayca hesaplanabilir.

Genişletilmiş Gamma fonksiyonu:

x in pozitif değerleri için tanımlanan Gamma fonksiyonu negatif x değerleri için de tanımlabilmektedir. Yani $\Gamma(x)$, tüm reel sayılara genişletilebilir.

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ özelliğini kullanarak negatif x değerleri için $\Gamma(x)$ değeri, $-n < x < -n+1$ ise $0 < x+n < 1$ olmak üzere

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)...(x+n-1)}$$

eşitliğinden hesaplanabilir. Buradan görülmektedir ki, Gamma fonksiyonu sıfır ve negatif tamsayılar için sınırsızdır. Yani değeri sonsuzdur. Faktöriyel özelliği tüm pozitif x değerleri için bir anlam ifade etmektedir. Ancak negatif x ler için aynı şey söylenemez. Çünkü x in negatif tamsayılara yakın değerleri için $\Gamma(x)$ ler pozitif ve negatif değerler alarak sınırsız şekilde büyümektedir.

Kompleks değişkenli Gamma fonksiyonu:

Gamma fonksiyonunun tanımındaki genelleştirilmiş integral ifadesinde x yerine z alınarak, bu fonksiyon kompleks düzleme genişletilebilir. Yani, $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt\ , \quad \operatorname{Re} z > 0$$

yazılabilir. Reel x lerde olduğu gibi, bu integral de $\operatorname{Re} z > 0$ için yakınsaktır. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ve

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+m)}{z\,(z+1)\,(z+2)\ldots(z+m-1)} \quad , \qquad m = 1, 2, 3...$$

özellikleri burada da geçerliliğini korumaktadır. Bu son eşitlikten görülmektedir ki, Gamma fonksiyonu kompleks düzlemin negatif tamsayılara karşılık gelen noktalarında ve $z = 0$ da birer *basit kutup*a sahiptir (Rainville 1973).

(2.2) ve (2.9) eşitliklerinden

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$$

yazılabilir.

II. Beta Fonksiyonu

$\mathbf{B}(x,y)$ ile gösterilen Beta fonksiyonu,

$$\mathbf{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt \quad ; \quad \operatorname{Re}(x) > 0 \ , \quad \operatorname{Re}(y) > 0 \tag{2.10}$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanan iki değişkenli bir fonksiyon olup

$$\mathbf{B}(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2x-1}\,(\cos\theta)^{2y-1}\,d\theta \tag{2.11}$$

$$\mathbf{B}(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du \tag{2.12}$$

$$\mathbf{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.13}$$

biçimlerinde de ifade edilebilir.

(2.10) eşitliğinde $t = \sin^2\theta$ alınırsa (2.11) eşitliği; $t = \frac{u}{1+u}$ alınırsa (2.12) eşitliği elde edilir. (2.13) eşitliğinde Beta fonksiyonunun Gamma fonksiyonu cinsinden ifadesi verilmiştir. Bunu görmek için $\Gamma(x)$ in tanımlandığı integralde $t = s^2$ dönüşümü yapılırsa

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = 2\int_0^{\infty} s^{2x-1} e^{-s^2} ds$$

olur. $\Gamma(x)$ in bu ifadesinden dolayı

$$\Gamma(y) = 2\int_0^\infty t^{2y-1} e^{-t^2} dt$$

yazılabilir. Buradan,

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty s^{2x-1} t^{2y-1} e^{-\left(s^2+t^2\right)} dtds$$

olup, $s = r\cos\theta,\ t = r\sin\theta$ kutupsal koordinatlarına geçilirse,

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty r^{2(x+y)-2} e^{-r^2} (\cos\theta)^{2x-1} (\sin\theta)^{2y-1} r\, dr d\theta \\ &= \left[2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2x-1} (\sin\theta)^{2y-1} d\theta\right]\left[2\int_0^\infty r^{2(x+y)-1} e^{-r^2} dr\right] \\ &= \mathbf{B}(x,y)\,\Gamma(x+y)\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise istenilendir. Ayrıca (2.13) eşitliğinden görülmektedir ki,

$$\mathbf{B}(x,y) = \mathbf{B}(y,x)$$

olup bu eşitlik Beta fonksiyonunun *simetri özelliği* olarak adlandırılır (Rainville 1973).

2.3 Hipergeometrik Seri ve Hipergeometrik Fonksiyonlar

α, β ve γ reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + ... \tag{2.14}$$

olarak ifade edilen seri matematikte büyük bir öneme sahiptir. Bu seri $1+x+x^2+...$ geometrik serisinin bir genelleştirilmesi olduğundan *hipergeometrik seri* adını alır. (2.14) ifadesinden görülmektedir ki, γ değeri sıfır ya da negatif bir tamsayı olmamalıdır. (2.14) hipergeometrik serisi $|x| < 1$ için yakınsak, $|x| > 1$ için ıraksaktır. $|x| = 1$ olduğu zaman $\gamma > \alpha+\beta$ ise seri mutlak yakınsaktır. $x = -1$ iken $\gamma > \alpha+\beta-1$ ise seri yakınsaktır.

(2.2) eşitliği de dikkate alınarak, (2.14) hipergeometrik serisi

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r r!}x^r \tag{2.15}$$

şeklinde yazılabilir. (2.15) eşitliğinde görülen F nin altındaki 2 ve 1 alt indisleri F nin yapısında biri α ve β, diğeri γ olmak üzere iki tip parametre bulunduğunu ifade eder. (2.15) eşitliğinin genelleştirilmiş şekli

$$ {}_pF_q(\alpha_1,...,\alpha_p;\gamma_1,...,\gamma_q;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n...(\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n...(\gamma_q)_n}\frac{x^n}{n!}$$

dir. Hipergeometrik fonksiyonu ifade eden ${}_2F_1$ gösterimi yerine genellikle sadece F kullanılır. Yani,

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=F(\alpha,\beta;\gamma;x)$$

olup, bu fonksiyon *hipergeometrik fonksiyon* olarak tanımlanır. (2.15) eşitliğinden açıkça görülmektedir ki, hipergeometrik fonksiyon α ve β ya göre simetriktir. Yani,

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x)=F(\beta,\alpha;\gamma;x)$$

sağlanır. (2.15) eşitliğinde $x=0$ alınırsa

$$F(\alpha,\beta;\gamma;0)=1$$

olduğu görülmektedir. Bilinen pek çok fonksiyonu, hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifade etmek mümkündür.

2.4 Laguerre, Hermite ve Jacobi Polinomlarının Bazı Özellikleri

I. Laguerre Polinomları ve Bazı Özellikleri

$0\leq x<\infty$, $\alpha>-1$ ve $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$xy''+(\alpha+1-x)y'+ny=0$$

denkleminin çözümlerinden biri

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\ (\alpha+1)_n}{(n-k)!\,k!\ (\alpha+1)_k}x^k\ ;\qquad n=0,1,...$$

ile gösterilen $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomlarıdır. Laguerre polinomları için $I = [0, \infty)$ olup ağırlık fonksiyonu

$$\omega(x) = x^{\alpha}\, e^{-x}$$

dir. Laguerre polinomları,

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha}\, e^{-x}\, L_m^{(\alpha)}(x)\, L_n^{(\alpha)}(x)\; dx = 0 \;\; ; \qquad m \neq n$$

şeklinde verilen ortogonallik bağıntısını gerçekler. Öte yandan, bu polinomların normu

$$\left\| L_n^{(\alpha)} \right\|^2 = \int_0^{\infty} x^{\alpha}\, e^{-x}\, \left[L_n^{(\alpha)}(x) \right]^2\, dx = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!} \;\; ; \qquad \alpha > -1$$

şeklindedir. Laguerre polinomları,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)\, t^n = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} \exp\left(-\frac{xt}{1-t} \right)$$

biçimindeki doğurucu fonksiyon bağıntısına ve

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^{x}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{\alpha+n} e^{-x} \right)$$

Rodrigues formülüne sahiptir. Laguerre polinomları için üç terimli rekürans bağıntısı

$$(n+1)\, L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (x - 2n - 1 - \alpha)\, L_n^{(\alpha)}(x) + (n + \alpha)\, L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0 \;\; ; \quad n = 1, 2, ...$$

şeklindendir.

II. Hermite Polinomları ve Bazı Özellikleri

$-\infty < x < \infty$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

denkleminin çözümlerinden biri

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k\; n!}{k!\,(n-2k)!} (2x)^{n-2k} \;\; ; \qquad n = 0, 1, ...$$

ile gösterilen n. dereceden $H_n(x)$ Hermite polinomlarıdır. Buradaki $\left[\frac{n}{2}\right]$ gösterimi, $\frac{n}{2}$ nin tam değeri olup

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & , \;\; n \text{ çift ise} \\ \frac{n-1}{2} & , \;\; n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklindedir. Hermite polinomları için $I = (-\infty, \infty)$ olup ağırlık fonksiyonu $\omega(x) = e^{-x^2}$ dir. Hermite polinomları

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \quad ; \qquad m \neq n$$

ortogonallik bağıntısını gerçekler. Öte yandan, bu polinomların normu

$$\|H_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \ [H_n(x)]^2 \ dx = 2^n \, n! \sqrt{\pi}$$

şeklindedir. Hermite polinomları,

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(2xt - t^2\right)$$

biçimindeki doğurucu fonksiyon bağıntısına ve

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Rodrigues formülüne sahiptir. Hermite polinomları için üç terimli rekürans bağıntısı

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \quad ; \qquad n \geq 1$$

şeklindendir.

III. Jacobi Polinomları ve Bazı Özellikleri

$a, b > -1$, $n \in \mathbb{N}$ ve $-1 \leq x \leq 1$ olmak üzere

$$(1 - x^2)y'' + (b - a - (a + b + 2)x)y' + n(n + a + b + 1)y = 0$$

diferensiyel denkleminin çözümlerinden biri

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+a}{n-k} \binom{n+b}{k} (x-1)^k \, (x+1)^{n-k} \quad ; \qquad n = 0, 1, ...$$

ile gösterilen $P_n^{(a,b)}(x)$ *Jacobi polinomları*dır. Jacobi polinomları, $I = [-1, 1]$ aralığında

$$\omega(x) = (1 - x)^a (1 + x)^b$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$\int_{-1}^{1} (1 - x)^a (1 + x)^b P_m^{(a,b)}(x) P_n^{(a,b)}(x) dx = 0 \quad ; \qquad m \neq n$$

ortogonallik bağıntısını gerçekler. Öte yandan, bu polinomların normu

$$\begin{aligned}
\left\| P_n^{(a,b)} \right\|^2 &= \int_{-1}^{1} (1-x)^a \, (1+x)^b \, \left[P_n^{(a,b)}(x) \right]^2 \, dx \\
&= \frac{2^{a+b+1}}{2n+a+b+1} \, \frac{\Gamma(a+n+1)\,\Gamma(b+n+1)}{n!\,\Gamma(a+b+n+1)}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Jacobi polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(a,b)}(x)\, t^n = \frac{2^{a+b}}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \left[1-t+\sqrt{1-2xt+t^2} \right]^{-a} \left[1+t+\sqrt{1-2xt+t^2} \right]^{-b}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısına, $D = \dfrac{d}{dx}$ olmak üzere

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^n} (1-x)^{-a} (1+x)^{-b} D^n \left[(1-x)^{a+n} (1+x)^{b+n} \right]$$

Rodrigues formülüne ve de

$$\begin{aligned}
&2n(n+a+b)(2n+a+b-2)P_n^{(a,b)}(x) - [(2n+a+b)(2n+a+b-2)x + a^2 - b^2] \\
&\times (2n+a+b-1)P_{n-1}^{(a,b)}(x) + 2(n+a-1)(n+b-1)(2n+a+b)P_{n-2}^{(a,b)}(x) = 0
\end{aligned}$$

biçiminde üç terimli rekürans bağıntısına sahiptir.

$P_n^{(a,b)}(x)$ Jacobi polinomlarının $a = b$ olması özel hali $P_n^{(a,a)}(x) = C_n^{(a)}(x)$ polinomları *ultraküresel polinom* adını almaktadır. a ve b nin diğer bazı özel halleri şunlardır:

a) $a = b = -\dfrac{1}{2}$ olması özel halindeki

$$\frac{n!}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} P_n^{(-1/2,-1/2)}(x) = n! \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{n-2k}\,(x^2-1)^k}{(2k)!\,(n-2k)!} = T_n(x)$$

polinomları, *I. tür Tchebycheff polinomları* olarak bilinirler.

b) $a = b = 0$ olması özel halindeki

$$P_n^{(0,0)}(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k} = P_n(x)$$

polinomları, *Legendre polinomları* olarak bilinirler.

2.5 Önemli Bazı İfadeler

Lemma 2.17

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A(k,n-k) \tag{2.16}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}B(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}B(k,n+k) \tag{2.17}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}T(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}T(k,n-2k) \tag{2.18}$$

eşitlikleri geçerlidir (Rainville 1973).

Lemma 2.18 $0 \leq \alpha < 1$ *için* $1+\alpha \leq \exp(\alpha) \leq (1-\alpha)^{-1}$ *eşitsizliği geçerlidir* (*Rainville 1973*).

İspat. $1+\alpha$, $\exp(\alpha)$ ve $(1-\alpha)^{-1}$ fonksiyonlarının $\alpha = 0$ noktası komşuluğundaki kuvvet serileri

$$1+\alpha = 1+\alpha\ , \quad \exp(\alpha) = 1+\alpha+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\ , \quad (1-\alpha)^{-1} = 1+\alpha+\sum_{n=2}^{\infty}\alpha^n$$

şeklinde olup bu üç eşitlik karşılaştırıldığında

$$1+\alpha \leq \exp(\alpha) \leq (1-\alpha)^{-1}$$

olduğu görülür. ■

Lemma 2.19 $n \in \mathbb{Z}^+$ *ve* $0 \leq \alpha < 1$ *için* $(1-\alpha)^n \geq 1-n\alpha$ *dır* (*Rainville 1973*).

İspat. Tümevarımla ispatlayalım. $n = 1$ için $1-\alpha = 1-1.\alpha$ olduğundan doğrudur. $n = k$ için

$$(1-\alpha)^k \geq 1-k\alpha$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu kabul edelim. Bu ifadenin her iki yanı $(1-\alpha)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}(1-\alpha)^{k+1} &\geq (1-k\alpha)(1-\alpha)\\ &= 1-(k+1)\alpha+k\alpha^2\\ &\geq 1-(k+1)\alpha\end{aligned}$$

elde edilir ki, bu ise verilen eşitsizliğin $n = k+1$ için doğru olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Lemma 2.20 *$n \in \mathbb{Z}^+$ ve $0 \leq t < n$ ise, bu durumda*

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}$$

dir (Rainville 1973).

İspat. Lemma 2.18 de $\alpha = \dfrac{t}{n}$ alındığında

$$1 + \frac{t}{n} \leq \exp\left(\frac{t}{n}\right) \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{-1}$$

elde edilir. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere bu eşitsizliğin n. kuvveti alınırsa

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{-n} \tag{i}$$

ya da

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} \geq e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

olarak bulunur. Bu son eşitsizlikten

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq 0 \tag{ii}$$

olup, eşitsizliğin sol yanı

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left[1 - e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right]$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan (i) den

$$e^t \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

yazılabileceğinden bu son iki ifade (ii) de dikkate alındığında

$$\begin{aligned} e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n &\leq e^{-t}\left[1 - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \\ &= e^{-t}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right] \end{aligned} \tag{iii}$$

elde edilir. Diğer taraftan Lemma 2.19 da $\alpha = \dfrac{t^2}{n^2}$ alınırsa

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{t^2}{n}$$

olup bu sonuç (iii) de kullanıldığında

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \left[1 - 1 + \frac{t^2}{n}\right] = \frac{t^2 e^{-t}}{n}$$

bulunur. Burada (ii) de dikkate alınarak

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}$$

elde edilir ki, bu ise ispatı tamamlar. ■

.

3. BAZI ÖZEL MATRİS FONKSİYONLARI

3.1 Gamma ve Matris Fonksiyonları

I. Gamma Matris Fonksiyonu

Tanım 3.1 *$P \in \mathbb{C}^{r\times r}$ pozitif kararlı bir matris olmak üzere, Gamma matris fonksiyonu*

$$\Gamma(P) = \int_0^\infty e^{-t} t^{P-I}\, dt \quad , \quad t^{P-I} = \exp\left[(P-I)\ln t\right] \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır ve $\Gamma(P)$ iyi tanımlı bir matristir.

$\Gamma^{-1}(z) = \dfrac{1}{\Gamma(z)}$ ile gösterilen Gamma fonksiyonunun tersi, z kompleks değişkeninin fonksiyonu olup tüm kompleks düzlemde analitik yani *tam fonksiyon*dur (Hille 1969). Bu nedenle Riesz-Dunford fonksiyonel hesabıyla görülebilir ki, $\mathbb{C}^{r\times r}$ deki herhangi bir P matrisinin ters Gamma fonksiyonu altındaki görüntüsüne karşılık gelen $\Gamma^{-1}(P)$ matrisi iyi tanımlı bir matristir (Dunford and Schwartz 1957). Eğer bir P matrisi

$$\forall n \geq 0 \text{ tamsayısı için } P + nI \text{ matrisi regülerdir} \tag{3.2}$$

koşulunu sağlıyorsa $\Gamma(P)$ matrisinin de $\Gamma^{-1}(P)$ ile gösterilen tersi vardır ve

$$P\,(P+I)\ldots(P+(n-1)\,I)\ \Gamma^{-1}(P+nI) = \Gamma^{-1}(P) \quad , \quad n \geq 1 \tag{3.3}$$

şeklindedir (Hille 1969).

(3.3) eşitliği, (3.2) koşulu altında (2.4) den yararlanarak

$$P\,(P+I)\ldots(P+(n-1)\,I) = \Gamma(P+nI)\ \Gamma^{-1}(P) \quad , \quad n \geq 1 \tag{3.4}$$

şeklinde ve (2.3) gösterimini de dikkate alarak

$$(P)_n = \Gamma(P+nI)\ \Gamma^{-1}(P) \quad , \qquad n \geq 0 \tag{3.5}$$

biçiminde yazılabilir.

Teorem 3.1 *$M \in \mathbb{C}^{r\times r}$ pozitif kararlı bir matris ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Bu durumda*

$$\Gamma(M) = \lim_{n\to\infty} (n-1)!\,(M)_n^{-1}\, n^M$$

eşitliği geçerlidir (Jódar and Cortés 1998b).

İspat. $M \in \mathbb{C}^{r\times r}$ pozitif kararlı bir matris olmak üzere, Rainville (1973) den

$$g(z) = \int_0^1 (1-s)^n s^{z-1} ds = n! \left[z(z+1)\ldots(z+n)\right]^{-1}, \ \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (3.6)$$

$$f(z) = \int_0^n \left(1-\frac{s}{n}\right)^n s^{z-1} ds = n! n^z \left[z(z+1)\ldots(z+n)\right]^{-1}, \ \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (3.7)$$

yazılabilir. g ve f, $\operatorname{Re}(z) > 0$ da holomorfik (analitik) fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlara fonksiyonel matris hesabının uygulanmasıyla (3.6) ve (3.7) den

$$g(M) = \int_0^1 (1-s)^n s^{M-I} ds = n! \left[M(M+I)\ldots(M+nI)\right]^{-1} \quad (3.8)$$

$$f(M) = \int_0^n \left(1-\frac{s}{n}\right)^n s^{M-I} ds = n! n^M \left[M(M+I)\ldots(M+nI)\right]^{-1} \quad (3.9)$$

yazılabilir. (3.1) ve (3.9) dan

$$\begin{aligned} &\Gamma(M) - n! n^M \left[M(M+I)\ldots(M+nI)\right]^{-1} \\ &= \int_0^\infty e^{-t} t^{M-I}\, dt - \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{M-I} dt \\ &= \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{M-I} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{M-I} dt \end{aligned} \quad (3.10)$$

olup $\int_0^\infty e^{-t} t^{M-I}\, dt$ yakınsak olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^\infty e^{-t} t^{M-I} dt = 0 \quad (3.11)$$

dır. O halde

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{M-I} dt = 0$$

olduğunu gösterelim. $0 \le t < n$ için Lemma 2.20 den

$$0 \le e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \le \frac{t^2 e^{-t}}{n}$$

olduğundan

$$\left\| \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{M-I} dt \right\| \le \frac{1}{n} \int_0^n \left\| t^{M+I} \right\| e^{-t} dt \quad (3.12)$$

yazılabilir. $t>0$ için $\ln t<t$ olduğundan, Lemma 2.8 ve Lemma 2.11 den

$$\begin{aligned}\left\| t^{M+I}\right\| &= \left\| \exp\left[(M+I)\ln t\right]\right\| \\ &\leq e^{\alpha(M+I)\ln t}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\left[\|M+I\|\sqrt{r}\ln t\right]^j}{j!} \\ &\leq t^{\alpha(M)+1}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\left[(\|M\|+1)\sqrt{r}\,t\right]^j}{j!} \quad , \qquad t>0 \end{aligned}\tag{3.13}$$

olup (3.12) ve (3.13) den

$$\frac{1}{n}\int_0^n \left\|t^{M+I}\right\| e^{-t}dt \leq \frac{1}{n}\left\{\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\left[(\|M\|+1)\sqrt{r}\right]^j}{j!}\int_0^n e^{-t}t^{\alpha(M)+j+1}dt\right\}\tag{3.14}$$

eşitsizliği yazılabilir. $0\leq j\leq r-1$ için

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha(M)+j+1}dt=\Gamma\left(\alpha\left(M\right)+j+2\right)\tag{3.15}$$

dir. (3.12), (3.14) ve (3.15) den

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\|\int_0^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{M-I}dt\right\| &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n\left\|t^{M+I}\right\|e^{-t}dt \\ &\leq 0\end{aligned}$$

olup buradan

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{M-I}dt=0\tag{3.16}$$

sonucu elde edilir. (3.10) eşitliğinin her iki yanının $n\to\infty$ için limiti alınır ve (3.11), (3.16) eşitlikleri kullanılırsa

$$\Gamma\left(M\right)=\lim_{n\to\infty}n!n^M\left[M\left(M+I\right)...\left(M+nI\right)\right]^{-1}$$

bulunur. Bu eşitlik, (2.3) gösterimi de dikkate alınarak

$$\Gamma\left(M\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n-1\right)!\left(M\right)_n^{-1}n^M$$

şeklinde yazılabilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

II. Beta Matris Fonksiyonu

$P,Q \in \mathbb{C}^{r\times r}$ pozitif kararlı matrisler olmak üzere, $0 < t < 1$ için $\ln t < t$ ve $\ln(1-t) < 1-t$ olduğundan ve Lemma 2.11 den

$$\int_0^1 \left\|t^{P-I}\right\| \left\|(1-t)^{Q-I}\right\| dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 \left\{ t^{\alpha(P)-1} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\left[(\|P\|-1)\sqrt{r}\,\ln t\right]^j}{j!} \right\} \\
&\quad \times \left\{ (1-t)^{\alpha(Q)-1} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\left[(\|Q\|-1)\sqrt{r}\,\ln(1-t)\right]^k}{k!} \right\} dt \\
&\leq \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\|P\|-1)^j (\|Q\|-1)^k (\sqrt{r})^{j+k}}{j!k!} \int_0^1 t^{\alpha(P)-1}(1-t)^{\alpha(Q)-1} (\ln t)^j \left[\ln(1-t)\right]^k dt \\
&\leq \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\|P\|+1)^j (\|Q\|+1)^k r^{\frac{j+k}{2}}}{j!k!} \int_0^1 t^{\alpha(P)+j-1}(1-t)^{\alpha(Q)+k-1} dt \\
&= \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\|P\|+1)^j (\|Q\|+1)^k r^{\frac{j+k}{2}}}{j!k!} B\left(\alpha(P)+j, \alpha(Q)+k\right) \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

bulunur. Bu integral sonlu olduğundan, Beta matris fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Tanım 3.2 *$P,Q \in \mathbb{C}^{r\times r}$ pozitif kararlı matrisler olmak üzere, Beta matris fonksiyonu*

$$\mathbf{B}(P,Q) = \int_0^1 t^{P-I}(1-t)^{Q-I}\ dt \tag{3.17}$$

şeklinde tanımlanır (Jódar and Cortés 1998b).

Lemma 3.1 *$P,Q \in \mathbb{C}^{r\times r}$ pozitif kararlı matrisler olsun. Eğer, P veya Q matrisi birim matrisin skaler bir katı ise, Beta matris fonksiyonu simetri özelliğine sahiptir. Yani*

$$\mathbf{B}(P,Q) = \mathbf{B}(Q,P)$$

eşitliği geçerlidir (Jódar et al. *1995).*

İspat. Kabul edelim ki, $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $Q = cI$ olsun. Bu durumda (3.17) ve Lemma 2.13 den

$$\mathbf{B}(P,Q) = \mathbf{B}(P,cI) = \int_0^1 t^{P-I}(1-t)^{(c-1)I}\ dt = \int_0^1 t^{P-I}(1-t)^{(c-1)}\ I\ dt$$

yazılabilir. Yukarıdaki integralde $t = 1-u$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(P,cI) &= \int_1^0 (1-u)^{P-I}\, u^{(c-1)}(-I)\ du = \int_0^1 u^{(c-1)}I\ (1-u)^{P-I}\, du \\ &= \int_0^1 u^{cI-I}(1-u)^{P-I}\ du = \mathbf{B}(cI,P)\end{aligned}$$

bulunur.

Aynı şekilde P matrisinin de birim matrisin skaler bir katı olması durumunda, simetri özelliğinin doğru olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Uyarı 3.1 *Köşegenleştirilebilen pozitif kararlı iki matris, çarpma işlemine göre değişme özelliğine sahip değilse ya da kısaca* değişmeli *değilse, Beta matris fonksiyonunun simetri özelliği geçerli değildir. Bu durum aşağıdaki örnekte açıkça görülmektedir.*

Örnek 3.1 $\mathbb{C}^{r\times r}$ *deki pozitif kararlı* $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *ve* $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *matrisleri için* $\sigma(P) = \sigma(Q) = \{1,2\}$ *dir.*

matris	***özdeğerler***	***özvektörler***	***köşegenleştiren matris***
$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	1 *ve* 2	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *ve* $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	1 *ve* 2	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *ve* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bu durumda

$$S^{-1}PS = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \textit{ve} \qquad T^{-1}QT = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olup P *ve* Q *matrisleri köşegenleştirilebilirdir, fakat*

$$PQ = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = QP$$

olduğundan çarpmaya göre değişmeli değildir. Ayrıca $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ *için*

$$(P-I)^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{ve} \quad (Q-I)^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. $0 < t < 1$ *için*

$$\begin{aligned}
t^{P-I} &= \exp\left[(P-I)\ln t\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(P-I)^n (\ln t)^n}{n!} \\
&= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(P-I)^n (\ln t)^n}{n!} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln t)^n}{n!} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(e^{\ln t} - 1\right) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} (t-1) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t-1 & t-1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t-1 & t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(1-t)^{P-I} &= \exp\left[(P-I)\ln(1-t)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(P-I)^n\left[\ln(1-t)\right]^n}{n!} \\
&= I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(P-I)^n\left[\ln(1-t)\right]^n}{n!} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\ln(1-t)\right]^n}{n!} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\left(e^{\ln(1-t)}-1\right) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}(-t) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -t & -t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1-t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Aynı şekilde

$$(1-t)^{Q-I}=\begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1-t \end{bmatrix} \qquad ve \qquad t^{Q-I}=\begin{bmatrix} 1 & t-1 \\ 0 & t \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(P,Q) &= \int_0^1 t^{P-I}(1-t)^{Q-I}\ dt \\
&= \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t-1 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1-t \end{bmatrix}\ dt \\
&= \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t-1 & 2t(1-t) \end{bmatrix}\ dt \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(Q,P) &= \int_0^1 t^{Q-I}\ (1-t)^{P-I}\ dt \\ &= \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & t-1 \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1-t \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \begin{bmatrix} -t^2+t+1 & -(1-t)^2 \\ -t^2 & t(1-t) \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

şeklinde olup $\mathbf{B}(P,Q) \neq \mathbf{B}(Q,P)$ *dir.*

Lemma 3.2 *$P, Q \in \mathbb{C}^{r\times r}$ pozitif kararlı ve değişmeli matrisler olmak üzere,*

$$\mathbf{B}(P,Q) = \mathbf{B}(Q,P)$$

eşitliği geçerlidir (Jódar and Cortés 1998b).

İspat. $PQ = QP$ olduğundan

$$\begin{aligned}(P-I)(Q-I) &= PQ - PI - IQ + I^2 \\ &= QP - IP - IQ + I^2 \\ &= (Q-I)P - (Q-I)I \\ &= (Q-I)(P-I)\end{aligned}$$

yazılabilir. Lemma 2.13 dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(P,Q) &= \int_0^1 t^{P-I}(1-t)^{Q-I}\ dt \\ &= \int_0^1 e^{(P-I)\ln t} e^{(Q-I)\ln(1-t)}\ dt \\ &= \int_0^1 e^{(P-I)\ln t + (Q-I)\ln(1-t)}\ dt \\ &= \int_0^1 e^{(Q-I)\ln(1-t)} e^{(P-I)\ln t}\ dt\end{aligned}$$

olup burada $t=1-u$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(P,Q) &= \int_1^0 e^{(Q-I)\ln(u)}e^{(P-I)\ln(1-u)}(-1)\ du \\ &= \int_0^1 u^{Q-I}(1-u)^{P-I}\ du \\ &= B(Q,P)\end{aligned}$$

olduğu görülür. ■

Lemma 3.3 *$D,E\in\mathbb{C}^{r\times r}$ pozitif kararlı ve köşegen matrisler olmak üzere,*

$$\mathbf{B}(D,E)=\Gamma(D)\,\Gamma(E)\ \Gamma^{-1}(D+E)$$

dir (Jódar and Cortés 1998b).

İspat. D ve E köşegen matrisleri için $DE=ED$ dir. O halde,

$$\mathbf{B}(D,E)=\int_0^1 t^{D-I}(1-t)^{E-I}\ dt$$

eşitliğinde $t=\sin^2\theta$ dönüşümü yapılırsa

$$\mathbf{B}(D,E)=2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2D-I}(\cos\theta)^{2E-I}\ d\theta \tag{3.18}$$

olarak bulunur. Gamma matris fonksiyonunun (3.1) tanımından dolayı

$$\Gamma(D)=\int_0^\infty t^{D-I}e^{-t}dt \qquad \text{ve} \qquad \Gamma(E)=\int_0^\infty v^{E-I}e^{-v}dv$$

yazılabilir. Bu son iki eşitlik taraf tarafa çarpılırsa

$$\Gamma(D)\,\Gamma(E)=\left(\int_0^\infty t^{D-I}e^{-t}dt\right)\left(\int_0^\infty v^{E-I}e^{-v}dv\right)=\int_0^\infty\int_0^\infty t^{D-I}v^{E-I}e^{-(t+v)}dtdv$$

bulunur. Burada $t=x^2$ ve $v=y^2$ dönüşümü yapalım. Bu durumda

$$\Gamma(D)\,\Gamma(E)=4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2D-I}y^{2E-I}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

olup, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ kutupsal koordinatlarına geçilir ve (3.18) eşitliği de dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\Gamma(D)\Gamma(E) &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}(r\cos\theta)^{2D-I}(r\sin\theta)^{2E-I}e^{-r^2}rdrd\theta \\
&= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}r^{2D-I}(\cos\theta)^{2D-I}r^{2E-I}(\sin\theta)^{2E-I}e^{-r^2}rdrd\theta \\
&= \left(2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2E-I}(\cos\theta)^{2D-I}d\theta\right)\left(2\int_0^{\infty}r^{2D+2E-I}e^{-r^2}dr\right) \\
&= \mathbf{B}(E,D)\left(2\int_0^{\infty}r^{2D+2E-I}e^{-r^2}dr\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son integralde $r=\sqrt{u}$ dönüşümü yapılır ve de D,E köşegen matrisleri için Lemma 3.2 den $\mathbf{B}(D,E)=\mathbf{B}(E,D)$ olduğu gözönünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
\Gamma(D)\Gamma(E) &= \mathbf{B}(D,E)\int_0^{\infty}u^{D+E-I}e^{-u}du \\
&= \mathbf{B}(D,E)\Gamma(D+E)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. $\Gamma^{-1}(D+E)$ matrisi iyi tanımlı olduğundan, yukarıdaki eşitliğin her iki yanını soldan $\Gamma^{-1}(D+E)$ ile çarparsak

$$\mathbf{B}(D,E)=\Gamma(D)\Gamma(E)\Gamma^{-1}(D+E)$$

olarak bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.2 *$P,Q\in\mathbb{C}^{r\times r}$ pozitif kararlı, köşegenleştirilebilir ve değişmeli matrisler olmak üzere,*

$$\mathbf{B}(P,Q)=\Gamma(P)\Gamma(Q)\ \Gamma^{-1}(P+Q)$$

dur (Jódar and Cortés 1998b).

İspat. P ve Q matrisleri köşegenleştirilebilir ve değişmeli olduğundan, Lemma 2.7 den dolayı aynı anda köşegenleştirilebilirdir. Bu durumda,

$$S^{-1}PS=D \quad , \quad S^{-1}QS=E \quad ; \quad D,E \quad \text{köşegen matrisler} \tag{3.19}$$

olacak şekilde regüler bir $S \in \mathbb{C}^{r\times r}$ matrisi vardır (Horn and Johnson 1993). $\sigma(P) = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$ ve $\sigma(Q) = \{\mu_1, ..., \mu_r\}$ ise $1, 2, ..., r$ nin bazı $i_1, i_2, ..., i_r$ permütasyonları için $\sigma(P+Q) = \left\{\lambda_1 + \mu_{i_j}\right\}_{j=1}^{r}$ dir (Horn and Johnson 1993). P ve Q pozitif kararlı olduklarından

$$\forall w \in \sigma(P+Q) \quad \text{için } \operatorname{Re}(w) > 0$$

olduğundan $P+Q$ matrisi de pozitif kararlıdır. (3.19) eşitliğinden

$$P+Q = S(D+E)S^{-1}$$

olup (2.5) eşitliğinden, Lemma 3.2 ve Lemma 3.3 den

$$\begin{aligned} \Gamma(P+Q) &= \Gamma\left(S(D+E)S^{-1}\right) = S\left(\int_0^\infty e^{-t}t^{D+E-I}dt\right)S^{-1} \\ &= S\Gamma(D+E)S^{-1} \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\left.\begin{aligned} \Gamma(P) = \Gamma(SDS^{-1}) = S\Gamma(D)S^{-1} \\ \Gamma(Q) = \Gamma(SES^{-1}) = S\Gamma(E)S^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(P,Q) &= S\mathbf{B}(D,E)S^{-1} \\ &= S\Gamma(D)\Gamma(E)\Gamma^{-1}(D+E)S^{-1} \end{aligned} \tag{3.22}$$

eşitlikleri yazılabilir. (3.20) eşitliğinden

$$\Gamma^{-1}(D+E) = S^{-1}\Gamma^{-1}(P+Q)S$$

olup bu sonuç (3.22) eşitliğinde kullanılır ve (3.21) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(P,Q) &= S\Gamma(D)\Gamma(E)\left[S^{-1}\Gamma^{-1}(P+Q)S\right]S^{-1} \\ &= S\Gamma(D)S^{-1}S\Gamma(E)S^{-1}\Gamma^{-1}(P+Q)SS^{-1} \\ &= \left(S\Gamma(D)S^{-1}\right)\left(S\Gamma(E)S^{-1}\right)\Gamma^{-1}(P+Q)I \\ &= \Gamma(P)\Gamma(Q)\Gamma^{-1}(P+Q) \end{aligned}$$

elde edilerek ispat tamamlanır. ■

Uyarı 3.2 *Yukarıdaki teoremdeki köşegenleştirilebilme koşulu $P+Q$ matrisinin her z özdeğeri için $\operatorname{Re}(z) > 0$ olmasını garanti eder. Aşağıdaki örnekte görülmektedir ki, P, Q pozitif kararlı matrisler ise $P+Q$ matrisi pozitif kararlı olmak zorunda değildir.*

Örnek 3.2 *$ab > 1$ olacak şekilde a, b pozitif sayılar olsun. Köşegenleştirilemeyen*

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ a & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad ve \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & b \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

matrislerinin özdeğerleri $\sigma(P) = \sigma(Q) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ şeklindedir. Fakat,

$$P + Q = \begin{bmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri $\sigma(P+Q) = \left\{1 - \sqrt{ab}, 1 + \sqrt{ab}\right\}$ dir ve $1 - \sqrt{ab} < 0$ dır.

Lemma 3.4 *$P, Q \in \mathbb{C}^{r \times r}$ pozitif kararlı ve değişmeli matrisleri için*

$$\forall m \geq 0 \ \ \text{tamsayısı için } P + Q + mI \text{ regüler matris}$$

koşulu sağlansın. Bu durumda $n \geq 0$ tamsayısı için,

i) $\mathbf{B}(P, Q + nI) = (P + Q)_n^{-1} (Q)_n \mathbf{B}(P, Q)$

ii) $\mathbf{B}(P + nI, Q + nI) = (P)_n (Q)_n (P + Q)_{2n}^{-1} \mathbf{B}(P, Q)$

eşitlikleri geçerlidir (Jódar and Cortés 1998a).

İspat. i) $n = 0$ için eşitlik doğrudur. P, Q matrisleri değişmeli olduğundan ve (3.17) den $m \geq 1$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(P, Q + mI) &= \int_0^1 t^{P-I} (1-t)^{Q+(m-1)I} \, dt \\ &= \lim_{\delta \to 0} \int_\delta^{1-\delta} t^{P-I} \ (1-t)^{Q+(m-1)I} \, dt \\ &= \lim_{\delta \to 0} \int_\delta^{1-\delta} t^{P+Q+(m-2)I} \ (1-t)^{Q+(m-1)I} \ t^{-(Q+(m-1)I)} \, dt \end{aligned}$$

yazılabilir. İntegral içindeki ifadede

$$u(t) = (1-t)^{Q+(m-1)I} \ t^{-(Q+(m-1)I)} \quad , \quad v'(t) = t^{P+Q+(m-2)I}$$

denirse

$$\begin{aligned} u'(t) &= -\left[Q + (m-1)I\right](1-t)^{Q+(m-2)I} \ t^{-(Q+(m-1)I)} \\ &\quad - \left[Q + (m-1)I\right](1-t)^{Q+(m-1)I} \ t^{-(Q+(m-2)I)} \\ v(t) &= \left[P + Q + (m-1)I\right]^{-1} t^{P+Q+(m-1)I} \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu durumda, yukarıdaki integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(P,Q+mI) &= \lim_{\delta\to 0}\left[[P+Q+(m-1)I]^{-1}(1-t)^{Q+(m-1)I}\ t^{P}\right]_{t=\delta}^{t=1-\delta} \\
&\quad+\lim_{\delta\to 0}\ \Bigg\{[P+Q+(m-1)I]^{-1}[Q+(m-1)I] \\
&\quad\times\int\limits_{\delta}^{1-\delta}(1-t)^{Q+(m-2)I}\ t^{P}+(1-t)^{Q+(m-1)I}\ t^{P-I}dt\Bigg\} \\
&= [P+Q+(m-1)I]^{-1}[Q+(m-1)I] \\
&\quad\times\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\delta}^{1-\delta}\left[(1-t)^{Q+(m-2)I}\ t^{P-I}\ [t+(1-t)]\ (1-t)^{Q+(m-2)I}\ t^{P-I}\right]dt \\
&= [P+Q+(m-1)I]^{-1}[Q+(m-1)I]\int\limits_{0}^{1}t^{P-I}\ (1-t)^{Q+(m-2)I}\ dt \\
&= [P+Q+(m-1)I]^{-1}[Q+(m-1)I]\,\mathbf{B}(P,Q+(m-1)I)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu işlem $m-1$ kez daha tekrar edilirse

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(P,Q+mI) &= [P+Q+(m-1)I]^{-1}[Q+(m-1)I][P+Q+(m-2)I]^{-1} \\
&\quad\times[Q+(m-2)I]\ldots[P+Q+I]^{-1}[Q+I][P+Q]^{-1}[Q]\,\mathbf{B}(P,Q)
\end{aligned}$$

bulunur. Lemma 2.3 dikkate alınır ve (2.3) gösterimi kullanılırsa

$$\mathbf{B}(P,Q+mI)=(P+Q)_m^{-1}(Q)_m\,\mathbf{B}(P,Q)$$

olarak bulunur.

ii) $n\geq 1$ için $\hat{P}=P+nI$ şeklinde olmak üzere, Lemma 3.4.i den

$$\mathbf{B}\left(\hat{P},Q+nI\right)=\left(\hat{P}+Q\right)_n^{-1}(Q)_n\,\mathbf{B}\left(\hat{P},Q\right) \tag{3.23}$$

yazılabilir. $PQ=QP$ olduğundan $\hat{P}Q=Q\hat{P}$ ve $\mathbf{B}\left(\hat{P},Q\right)=\mathbf{B}\left(Q,\hat{P}\right)$ dir. O halde, (3.23) den

$$\mathbf{B}\left(\hat{P},Q+nI\right)=\left(\hat{P}+Q\right)_n^{-1}(Q)_n\,\mathbf{B}\left(Q,\hat{P}\right) \tag{3.24}$$

dir. Ayrıca Lemma 3.4.i den ise

$$\mathbf{B}(Q,P+nI)=(Q+P)_n^{-1}(P)_n\,\mathbf{B}(Q,P)=(P+Q)_n^{-1}(P)_n\,\mathbf{B}(P,Q) \tag{3.25}$$

şeklindedir. $\hat{P} = P + nI$ olduğundan (3.24) ve (3.25) den

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(P+nI, Q+nI) &= (P+Q+nI)_n^{-1}(Q)_n \mathbf{B}(Q, P+nI) \\
&= (P+Q+nI)_n^{-1}(Q)_n (P+Q)_n^{-1}(P)_n \mathbf{B}(P,Q) \quad (3.26)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned}
&(P+Q)_n (P+Q+nI)_n \\
&= (P+Q)(P+Q+I)\ldots(P+Q+(n-1)I) \\
&\times (P+Q+nI)(P+Q+(n+1)I)\ldots(P+Q+(n+n-1)I) \\
&= (P+Q)(P+Q+I)\ldots(P+Q+(2n-1)I) \\
&= (P+Q)_{2n}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$(P+Q+nI)_n^{-1}(P+Q)_n^{-1} = [(P+Q)_n (P+Q+nI)_n]^{-1} = (P+Q)_{2n}^{-1}$$

yazılabilir. Bu sonuç, (3.26) eşitliğinde kullanılırsa

$$\mathbf{B}(P+nI, Q+nI) = (P+Q)_{2n}^{-1}(P)_n (Q)_n \mathbf{B}(P,Q)$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Uyarı 3.3 *Lemma 3.4.ii, Beta matris fonksiyonunun tanımını, pozitif kararlı olması gerekmeyen matris argümentli olarak genişletmemizi sağlar.*

Tanım 3.3 $P, Q \in \mathbb{C}^{r\times r}$ *değişmeli matrisleri*

$$\forall n \geq 0 \ \ \textit{tamsayısı için} \ \ P+nI, \ Q+nI, \ P+Q+nI \ \ \textit{matrisleri regüler} \quad (3.27)$$

koşulunu sağlamak üzere,

$$\beta(P,Q) = \min\{\beta(P), \beta(Q), \beta(P+Q)\} \quad \textit{ve} \quad n_0 = n_0(P;Q) = [\ |\beta(P,Q)|\ ] + 1 \quad (3.28)$$

olsun. Burada [.], *tam değer fonksiyonudur. O halde* $\mathbf{B}(P,Q)$ *değeri,*

$$\mathbf{B}(P,Q) = (P)_{n_0}^{-1}(Q)_{n_0}^{-1}(P+Q)_{2n_0}\mathbf{B}(P+n_0 I, Q+n_0 I)$$

ile tanımlanır (Jódar and Cortés 1998a).

Lemma 3.5 *$\hat{P}, \hat{Q}, \hat{P}+\hat{Q} \in \mathbb{C}^{r\times r}$ pozitif kararlı ve değişmeli matrisler olmak üzere*

$$\mathbf{B}(\hat{P}, \hat{Q}) = \Gamma(\hat{P})\Gamma(\hat{Q})\Gamma^{-1}(\hat{P}+\hat{Q})$$

eşitliği geçerlidir (Jódar and Cortés 1998a).

İspat. $\hat{P}, \hat{Q}$ pozitif kararlı ve değişmeli olduğundan Gamma matris fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\hat{P}\right)\Gamma\left(\hat{Q}\right) &= \left(\int_0^\infty e^{-u}u^{\hat{P}-I}\, du\right)\left(\int_0^\infty e^{-v}v^{\hat{Q}-I}\, dv\right) \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-u-v}u^{\hat{P}-I}\, v^{\hat{Q}-I}\, dudv
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $u = xy$, $v = y(1-x)$ dönüşümü yapılırsa, $J(x,y) = y$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\hat{P}\right)\Gamma\left(\hat{Q}\right) &= \int_0^\infty\int_0^1 e^{-y}(xy)^{\hat{P}-I}\, \left[y(1-x)\right]^{\hat{Q}-I} y\, dxdy \\
&= \left(\int_0^\infty e^{-y}y^{\hat{P}+\hat{Q}-I-I}\, dy\right)\left(\int_0^1 x^{\hat{P}-I}\, (1-x)^{\hat{Q}-I}\, dx\right) \\
&= \Gamma\left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\mathbf{B}\left(\hat{P}, \hat{Q}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. $\Gamma\left(\hat{P}+\hat{Q}\right)$ matrisi iyi tanımlı olduğundan

$$\mathbf{B}\left(\hat{P}, \hat{Q}\right) = \Gamma\left(\hat{P}\right)\Gamma\left(\hat{Q}\right)\Gamma^{-1}\left(\hat{P}+\hat{Q}\right)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ∎

Teorem 3.3 *$P, Q \in \mathbb{C}^{r\times r}$ değişmeli matrisleri için,* (3.27) *koşulu sağlanmak üzere*

$$\mathbf{B}(P,Q) = \Gamma(P)\Gamma(Q)\Gamma^{-1}(P+Q)$$

eşitliği geçerlidir (Jódar and Cortés 1998a).

İspat. $n_0 = n_0(P;Q)$, (3.28) ile verilmek üzere Tanım 3.3 den

$$\mathbf{B}(P,Q) = (P)_{n_0}^{-1}(Q)_{n_0}^{-1}(P+Q)_{2n_0}\mathbf{B}(P+n_0I, Q+n_0I)$$

dır ki, burada $P+n_0I$ ve $Q+n_0I$ matrisleri pozitif kararlıdır. (3.3) den dolayı

$$\begin{aligned}\Gamma(P) &= \Gamma(P+n_0I)(P+(n_0-1)I)^{-1}\dots(P+I)^{-1}P^{-1}\\ \Gamma(Q) &= \Gamma(Q+n_0I)(Q+(n_0-1)I)^{-1}\dots(Q+I)^{-1}Q^{-1}\\ \Gamma(P+Q) &= \Gamma(P+Q+2n_0I)(P+Q+(2n_0-1)I)^{-1}\dots(P+Q+I)^{-1}(P+Q)^{-1}\end{aligned}$$

yazılabilir. $PQ=QP$ olduğundan dolayı son üç eşitlikten

$$\begin{aligned}&\Gamma(P)\Gamma(Q)\Gamma^{-1}(P+Q)\\ &= \Gamma(P+n_0I)\Gamma(Q+n_0I)\Gamma^{-1}(P+Q+2n_0I)\\ &\quad\times(P+(n_0-1)I)^{-1}\dots(P+I)^{-1}P^{-1}(Q+(n_0-1)I)^{-1}\dots(Q+I)^{-1}Q^{-1}\\ &\quad\times(P+Q+(2n_0-1)I)\dots(P+Q+I)(P+Q)\\ &= \Gamma(P+n_0I)\Gamma(Q+n_0I)\Gamma^{-1}(P+Q+2n_0I)(P)_{n_0}^{-1}(Q)_{n_0}^{-1}(P+Q)_{2n_0} \qquad (3.29)\end{aligned}$$

yazılabilir. $P+n_0I$, $Q+n_0I$ ve $P+Q+2n_0I$ matrisleri pozitif kararlı olduklarından Lemma 3.5 ve Lemma 3.4.ii den sırasıyla

$$\Gamma(P+n_0I)\Gamma(Q+n_0I)\Gamma^{-1}(P+Q+2n_0I)=\mathbf{B}(P+n_0I,Q+n_0I) \qquad (3.30)$$

$$\mathbf{B}(P+n_0I,Q+n_0I)=(P)_{n_0}(Q)_{n_0}(P+Q)_{2n_0}^{-1}\mathbf{B}(P,Q) \qquad (3.31)$$

olup (3.29) – (3.31) den

$$\mathbf{B}(P,Q)=\Gamma(P)\Gamma(Q)\Gamma^{-1}(P+Q)$$

elde edilir. ■

3.2 Hipergeometrik Matris Fonksiyonu

$C\in\mathbb{C}^{r\times r}$ için

$$\forall n\geq 0 \text{ tamsayısı için } C+nI \text{ matrisi regüler} \qquad (3.32)$$

koşulu sağlanmak üzere, skaler durumdaki genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonların gösteriminden yararlanarak ${}_0F_1(-;C;z)$ ile gösterilen ve

$${}_0F_1(-;C;z):=\sum_{n=0}^{\infty}(C)_n^{-1}\frac{z^n}{n!} \qquad (3.33)$$

şeklinde tanımlanan matris kuvvet serisi, ilk olarak Laguerre matris polinomları ile bağlantısında tanımlanmış ve kullanılmıştır (Jódar and Sastre 1998).

Teorem 3.4 (3.32) *koşulu altında* (3.33) *ile tanımlanan seri, her z kompleks sayısı için yakınsaktır (Jódar and Sastre 1998).*

İspat. $n > \|C\|$ olmak üzere, eğer n yeterince büyük ise pertürbasyon lemmasından

$$\left\| \left(\frac{C}{n} + I \right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \frac{\|C\|}{n}} = \frac{n}{n - \|C\|} \tag{3.34}$$

yazılabilir (Dunford and Schwartz 1957). O halde $n > 0$ tamsayısı için (3.34) eşitsizliği de kullanılarak

$$\begin{aligned} \left\| (C + nI)^{-1} \right\| &= \left\| \left[n \left(\frac{C}{n} + I \right) \right]^{-1} \right\| = \left\| \frac{1}{n} \left(\frac{C}{n} + I \right)^{-1} \right\| = \frac{1}{n} \left\| \left(\frac{C}{n} + I \right)^{-1} \right\| \\ &\leq \frac{1}{n} \frac{n}{n - \|C\|} = \frac{1}{n - \|C\|} \end{aligned} \tag{3.35}$$

yazılabilir. Diğer taraftan $n > \|C\|$ için

$$\left\| (C)_n^{-1} \frac{z^n}{n!} \right\| = \left\| (C)_n^{-1} \right\| \frac{|z|^n}{n!}$$

olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| (C)_n^{-1} \right\| \frac{|z|^n}{n!}$$

serisinin karakterini inceleyelim. Oran testinden ve (3.35) den de yararlanılırsa

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\left\| (C)_{n+1}^{-1} \right\| |z|^{n+1} n!}{\left\| (C)_n^{-1} \right\| |z|^n (n+1)!} \right| &\leq \lim_{n \to \infty} \frac{\left\| (C + nI)^{-1} \right\| |z|}{(n+1)} \\ &\leq \lim_{n \to \infty} \frac{|z|}{(n - \|C\|)(n+1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Serilerin karakterleri için oran testinden dolayı, (3.32) koşulu altında her z kompleks sayısı için

$${}_0F_1(-; C; z) = \sum_{n=0}^{\infty} (C)_n^{-1} \frac{z^n}{n!}$$

serisi yakınsaktır. ■

Tanım 3.4 $A, B, C \in \mathbb{C}^{r \times r}$ *olmak üzere,* (3.32) *koşulu altında*

$$F(A, B; C; z) := \sum_{n=0}^{\infty} (A)_n (B)_n (C)_n^{-1} \frac{z^n}{n!}$$

şeklindeki matris kuvvet serisi ile verilen $F(A, B; C; z)$ *ye* hipergeometrik matris fonksiyonu *denir.*

Teorem 3.5 *$A, B, C \in \mathbb{C}^{r\times r}$ olmak üzere, (3.32) koşulu altında*

$$F(A,B;C;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(A)_n(B)_n(C)_n^{-1}\frac{z^n}{n!} \tag{3.36}$$

serisi, $|z|<1$ için mutlak yakınsaktır (Jódar and Cortés 2000).

İspat. Matris norm özelliklerinden ve matrisler için Pochhammer gösteriminden $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned}\|(A)_n\| &= \|A(A+I)\ldots(A+(n-1)I)\| \\ &\leq \|A\|\,\|(A+I)\|\ldots\|(A+(n-1)I)\| \\ &\leq \|A\|(\|A\|+1)\ldots(\|A\|+n-1) \\ &= (\|A\|)_n \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\|(B)_n\| \leq (\|B\|)_n \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}\left\|(C)_n^{-1}\right\| &= \left\|(C+(n-1)I)^{-1}\ldots(C+I)^{-1}C^{-1}\right\| \\ &\leq \left\|C^{-1}\right\|\left\|(C+I)^{-1}\right\|\ldots\left\|(C+(n-1)I)^{-1}\right\| \end{aligned} \tag{3.39}$$

olup

$$\Omega(n)=\left\|C^{-1}\right\|\left\|(C+I)^{-1}\right\|\ldots\left\|(C+(n-1)I)^{-1}\right\| \tag{3.40}$$

ile gösterilsin. $n > \|C\|$ olmak üzere, (3.37) - (3.40) kullanılarak

$$\left\|(A)_n(B)_n(C)_n^{-1}\frac{z^n}{n!}\right\| \leq (\|A\|)_n(\|B\|)_n\ \Omega(n)\ \frac{|z|^n}{n!}$$

eşitsizliği yazılabilir. O halde

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\|A\|)_n(\|B\|)_n\ \Omega(n)\frac{|z|^n}{n!}$$

serisinin yakınsaklığını oran testini kullanarak gösterelim. (3.35) eşitsizliği de kullanılarak,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\|A\|)_{n+1}(\|B\|)_{n+1}\Omega(n+1)|z|^{n+1}n!}{(\|A\|)_n(\|B\|)_n\Omega(n)|z|^n(n+1)!}\right|$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\|A\|+n)(\|B\|+n)\left\|(C+nI)^{-1}\right\|}{n+1}|z|\right| \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\frac{(\|A\|+n)(\|B\|+n)}{(n+1)(n-\|C\|)}|z| \\
&= |z|
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Oran testinden dolayı (3.32) koşulu altında (3.36) serisi $|z|<1$ için yakınsaktır. ∎

Teorem 3.6 *$A,B,C\in\mathbb{C}^{r\times r}$ pozitif kararlı matrisler ve*

$$\beta(C)>\alpha(A)+\alpha(B) \tag{3.41}$$

olmak üzere (3.36) *ile tanımlanan seri, $|z|=1$ için mutlak yakınsaktır (Jódar and Cortés 1998a).*

İspat. (3.41) hipotezinden dolayı

$$\beta(C)-\alpha(A)-\alpha(B)=2\delta \tag{3.42}$$

olacak şekilde pozitif bir δ sayısı vardır. Diğer taraftan,

$$n^{1+\delta}\left(\frac{1}{n!}(A)_n(B)_n(C)_n^{-1}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n^{1+\delta}}{n!}\frac{(n-1)!n^An^{-A}(A)_n}{(n-1)!}\frac{(n-1)!n^Bn^{-B}(B)_n}{(n-1)!}(C)_n^{-1}n^Cn^{-C} \\
&= \frac{n^{1+\delta}}{n}\left(\frac{n^{-A}(A)_n}{(n-1)!}\right)n^A\left(\frac{n^{-B}(B)_n}{(n-1)!}\right)n^B\left((n-1)!(C)_n^{-1}n^C\right)n^{-C}
\end{aligned}$$

ya da

$$n^{1+\delta}\left(\frac{(A)_n(B)_n(C)_n^{-1}}{n!}\right)=n^{\delta}\left(\frac{n^{-A}(A)_n}{(n-1)!}\right)n^A\left(\frac{n^{-B}(B)_n}{(n-1)!}\right)n^B\left((n-1)!(C)_n^{-1}n^C\right)n^{-C} \tag{3.43}$$

şeklinde yazılabilir. $\alpha(-C) = -\beta(C)$ olduğunu da dikkate alarak Lemma 2.11 den

$$
\begin{aligned}
\left\|n^{A}\right\|\left\|n^{B}\right\|\left\|n^{-C}\right\| &\leq n^{\alpha(A)+\alpha(B)-\beta(C)}\left\{\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\left[\|A\|\sqrt{r}\ln n\right]^{j}}{j!}\right\} \\
&\quad\times\left\{\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\left[\|B\|\sqrt{r}\ln n\right]^{j}}{j!}\right\}\left\{\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\left[\|C\|\sqrt{r}\ln n\right]^{j}}{j!}\right\} \\
&\leq n^{-2\delta}\left\{\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\left[\max\left\{\|A\|,\|B\|,\|C\|\right\}\sqrt{r}\ln n\right]^{j}}{j!}\right\}^{3} \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. $(3.42)-(3.44)$ ve Teorem (3.1) den, $|z|=1$ için

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n^{1+\delta}\left\|\frac{(A)_n(B)_n(C)_n^{-1}}{n!}z^{n}\right\| &\leq \lim_{n\to\infty} n^{\delta}\left\|\frac{n^{-A}(A)_n}{(n-1)!}\right\|\left\|n^{A}\right\|\left\|\frac{n^{-B}(B)_n}{(n-1)!}\right\| \\
&\quad\times\left\|n^{B}\right\|\left\|(n-1)!\,(C)_n^{-1}n^{C}\right\|\left\|n^{-C}\right\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\left\|\Gamma^{-1}(A)\right\|\left\|\Gamma^{-1}(B)\right\|\left\|\Gamma(C)\right\|n^{-\delta} \\
&\quad\times\left\{\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\left[\max\left\{\|A\|,\|B\|,\|C\|\right\}\sqrt{r}\,\right]^{j}}{j!}(\ln n)^{j}\right\}^{3} \\
&= \left\|\Gamma^{-1}(A)\right\|\left\|\Gamma^{-1}(B)\right\|\left\|\Gamma(C)\right\|.0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Çünkü $k\geq 0$ tamsayısı için $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\delta}(\ln n)^{k}=0$ dır. Bu durumda

$$
\lim_{n\to\infty} n^{1+\delta}\left\|\frac{(A)_n(B)_n(C)_n^{-1}}{n!}z^{n}\right\| = 0 \quad , \qquad |z|=1
$$

olup, pozitif terimli serilerin karakterini belirleyen limit testinden dolayı (3.36) serisi $|z|=1$ için mutlak yakınsaktır. ■

Teorem 3.7 *$|z|<1$ ve $A,B,C\in\mathbb{C}^{r\times r}$ matrisleri için*

$$BC = CB \qquad (3.45)$$

$$B, C \;\; \textit{ve } C-B \;\; \textit{pozitif kararlı matrisler} \qquad (3.46)$$

koşulları sağlanmak üzere, $F(A,B;C;z)$ hipergeometrik matris fonksiyonu

$$
F(A,B;C;z)=\left(\int_{0}^{1}(1-tz)^{-A}t^{B-I}(1-t)^{C-B-I}\,dt\right)\Gamma^{-1}(B)\,\Gamma^{-1}(C-B)\,\Gamma(C)
$$

şeklinde bir integral gösterimine sahiptir (Jódar and Cortés 1998a).

İspat. (3.46) koşulu altında (2.3) gösteriminden ve (3.4) eşitliğinden yararlanıldığında

$$\begin{aligned}(B)_n (C)_n^{-1} &= \Gamma^{-1}(B)\Gamma(B+nI)\left[\Gamma^{-1}(C)\Gamma(C+nI)\right]^{-1}\\ &= \Gamma^{-1}(B)\Gamma(B+nI)\Gamma^{-1}(C+nI)\Gamma(C)\\ &= \Gamma^{-1}(B)\Gamma^{-1}(C-B)\Gamma(C-B)\Gamma(B+nI)\Gamma^{-1}(C+nI)\Gamma(C)\end{aligned} \tag{3.47}$$

yazılabilir. Diğer taraftan (3.17) tanımı, Lemma 3.2 ve Lemma 3.5 den

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{B+(n-1)I}\ (1-t)^{C-B-I}\ dt &= \mathbf{B}(B+nI, C-B) = \mathbf{B}(C-B, B+nI)\\ &= \Gamma(C-B)\Gamma(B+nI)\Gamma^{-1}(C+nI)\end{aligned} \tag{3.48}$$

olup (3.47) ve (3.48) den

$$(B)_n (C)_n^{-1} = \Gamma^{-1}(B)\Gamma^{-1}(C-B)\left(\int_0^1 t^{B+(n-1)I}\ (1-t)^{C-B-I}\ dt\right)\Gamma(C) \tag{3.49}$$

yazılabilir. (3.49) eşitliği kullanılarak $|z|<1$ için

$$\begin{aligned}&F(A,B;C;z)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A)_n (B)_n (C)_n^{-1}}{n!}z^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A)_n \Gamma^{-1}(B)\Gamma^{-1}(C-B)}{n!}\left(\int_0^1 t^{B+(n-1)I}\ (1-t)^{C-B-I}\ dt\right)\Gamma(C)\,z^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 (A)_n \Gamma^{-1}(B)\Gamma^{-1}(C-B)\,t^{B+(n-1)I}\ (1-t)^{C-B-I}\,\Gamma(C)\frac{z^n}{n!}dt\right)\end{aligned} \tag{3.50}$$

yazılabilir. $0 \le t \le 1$ olmak üzere

$$S_n(t) = (A)_n \Gamma^{-1}(B)\Gamma^{-1}(C-B)\,t^{B+(n-1)I}\ (1-t)^{C-B-I}\,\Gamma(C)\frac{z^n}{n!}$$

ile tanımlanan matris fonksiyon dizisini dikkate alalım. $0<t<1$, $n \ge 0$ için ve matris norm özelliklerinden

$$\begin{aligned}\|S_n(t)\| &= \left\|(A)_n \Gamma^{-1}(B)\Gamma^{-1}(C-B)\,t^{B+(n-1)I}\ (1-t)^{C-B-I}\,\Gamma(C)\frac{z^n}{n!}\right\|\\ &\le (\|A\|)_n \left\|\Gamma^{-1}(B)\right\|\left\|\Gamma^{-1}(C-B)\right\|\|\Gamma(C)\|\left\|t^{B-I}\right\|\left\|(1-t)^{C-B-I}\right\|\frac{|z|^n}{n!}\end{aligned} \tag{3.51}$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 2.11 den yararlanarak, $0 < t < 1$ için $\ln t < t < 1$ ve $\ln(1-t) < 1-t < 1$ olduğunu da dikkate alarak

$$\begin{aligned}
\left\|t^{B-I}\right\| \left\|(1-t)^{C-B-I}\right\| &\leq t^{\alpha(B)-1}(1-t)^{\alpha(C-B)-1}\left(\sum_{i=0}^{r-1}\frac{\left[\ \|B-I\|\sqrt{r}\ \ln t\ \right]^i}{i!}\right) \\
&\times\left(\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\left[\ \|C-B-I\|\sqrt{r}\ \ln(1-t)\ \right]^j}{j!}\right) \\
&\leq t^{\alpha(B)-1}(1-t)^{\alpha(C-B)-1}\left(\sum_{i=0}^{r-1}\frac{\left[\|B-I\|\sqrt{r}\ \right]^i}{i!}\right) \\
&\times\left(\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\left[\|C-B-I\|\sqrt{r}\ \right]^j}{j!}\right) \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. (3.51) ve (3.52) eşitsizlikleri dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\|S_n(t)\| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty}(\|A\|)_n\left\|\Gamma^{-1}(B)\right\|\left\|\Gamma^{-1}(C-B)\right\|\|\Gamma(C)\|\left\|t^{B-I}\right\|\left\|(1-t)^{C-B-I}\right\|\frac{|z|^n}{n!} \\
&= \left\|\Gamma^{-1}(B)\right\|\left\|\Gamma^{-1}(C-B)\right\|\|\Gamma(C)\|\left\|t^{B-I}\right\|\left\|(1-t)^{C-B-I}\right\|\sum_{n=0}^{\infty}(\|A\|)_n\frac{|z|^n}{n!} \\
&\leq \left\|\Gamma^{-1}(B)\right\|\left\|\Gamma^{-1}(C-B)\right\|\|\Gamma(C)\|\, t^{\alpha(B)-1}(1-t)^{\alpha(C-B)-1} \\
&\times\left(\sum_{i=0}^{r-1}\frac{\left[\|B-I\|\sqrt{r}\right]^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\left[\|C-B-I\|\sqrt{r}\right]^j}{j!}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(\|A\|)_n\frac{|z|^n}{n!}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $|z| < 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\|A\|)_n\frac{|z|^n}{n!}$$

serisi yakınsaktır. Ayrıca $\alpha(B) > 0$ ve $\alpha(C-B) > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \left\|\Gamma^{-1}(B)\right\|\left\|\Gamma^{-1}(C-B)\right\|\|\Gamma(C)\|\ t^{\alpha(B)-1}\ (1-t)^{\alpha(C-B)-1} \\
&\times\left(\sum_{i=0}^{r-1}\frac{\left[\|B-I\|\sqrt{r}\right]^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\left[\|C-B-I\|\sqrt{r}\ \right]^j}{j!}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(\|A\|)_n\frac{|z|^n}{n!}
\end{aligned}$$

fonksiyonu integrallenebilir olup

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi(t)\,dt &= \left\|\Gamma^{-1}(B)\right\|\left\|\Gamma^{-1}(C-B)\right\|\left\|\Gamma(C)\right\|\left(\int_0^1 t^{\alpha(B)-1}\ (1-t)^{\alpha(C-B)-1}\,dt\right)\\ &\quad\times\left(\sum_{i=0}^{r-1}\frac{\left[\|B-I\|\sqrt{r}\right]^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\left[\|C-B-I\|\sqrt{r}\ \right]^j}{j!}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(\|A\|)_n\frac{|z|^n}{n!}\\ &= \left\|\Gamma^{-1}(B)\right\|\left\|\Gamma^{-1}(C-B)\right\|\left\|\Gamma(C)\right\|\ \mathbf{B}\left(\alpha(B),\alpha(C-B)\right)\\ &\quad\times\left(\sum_{i=0}^{r-1}\frac{\left[\|B-I\|\sqrt{r}\right]^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\left[\|C-B-I\|\sqrt{r}\ \right]^j}{j!}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(\|A\|)_n\frac{|z|^n}{n!}\end{aligned}$$

dir. Yakınsaklık teoremi gereğince (3.50) eşitliğindeki toplam ile integral yer değiştirebileceğinden ve de (3.45) eşitliği de kullanılarak

$$\begin{aligned}F(A,B;C;z) &= \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}(A)_n\,\Gamma^{-1}(B)\,\Gamma^{-1}(C-B)\,t^{B+(n-1)I}\ (1-t)^{C-B-I}\,\Gamma(C)\frac{z^n}{n!}\right)dt\\ &= \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A)_n(tz)^n}{n!}\right)t^{B-I}(1-t)^{C-B-I}\,dt\ \Gamma^{-1}(B)\,\Gamma^{-1}(C-B)\,\Gamma(C)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. (2.6) eşitliği gözönüne alındığında

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A)_n(tz)^n}{n!}=(1-tz)^{-A}\quad;\quad |z|<1\ ,\ 0<t<1$$

şeklinde olup bu değer, bir önceki eşitlikte yerine yazılırsa

$$F(A,B;C;z)=\left(\int_0^1(1-tz)^{-A}\,t^{B-I}(1-t)^{C-B-I}\,dt\right)\ \Gamma^{-1}(B)\,\Gamma^{-1}(C-B)\,\Gamma(C)$$

şeklinde $F(A,B;C;z)$ hipergeometrik matris fonksiyonunun integral gösterimi bulunmuş olur. ■

Hipergeometrik matris diferensiyel denklemi:

$A,B,C\in\mathbb{C}^{r\times r}$ matrisleri için, (3.32) koşuluna ek olarak

$$BC=CB \tag{3.53}$$

koşulu da sağlanmak üzere

$$z\,(1-z)\,W'' - zAW' + W'\,(C - z\,(B+I)) - AWB = O \quad , \qquad 0 \leq |\ z\ | < 1 \quad (3.54)$$

şeklindeki hipergeometrik matris diferensiyel denklemini dikkate alalım. $F_n \in \mathbb{C}^{r\times r}$ belirlenecek matrisler olmak üzere, bu denklemin

$$W_1\,(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n \quad ; \quad F_0 = I\ , \quad |z| < 1$$

tipinde serisel çözümünü araştıralım. Çözümün denklemi sağlama koşulundan $W_1\,(z)$ nin serisel ifadesi ve

$$W_1'\,(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nF_n z^{n-1}\ , \quad W_1''\,(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,F_n z^{n-2}$$

türevleri (3.54) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&z\,(1-z)\,W_1''\,(z) - zAW_1'\,(z) + W_1'\,(z)\,(C - z\,(B+I)) - AW_1\,(z)\,B \\
&\quad = z\,(1-z)\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,F_n z^{n-2} - zA\sum_{n=1}^{\infty} nF_n z^{n-1} \\
&\qquad + \left(\sum_{n=1}^{\infty} nF_n z^{n-1}\right)(C - z\,(B+I)) - A\left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n\right)B \\
&\quad = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,F_n z^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,F_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} nAF_n z^n \\
&\qquad + \sum_{n=1}^{\infty} nF_n C z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} nF_n\,(B+I)\,z^n - \sum_{n=0}^{\infty} AF_n B z^n \\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty} n\,(n+1)\,F_{n+1} z^n - \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,F_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} nAF_n z^n \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,F_{n+1} C z^n - \sum_{n=1}^{\infty} nF_n\,(B+I)\,z^n - \sum_{n=0}^{\infty} AF_n B z^n \\
&\quad = \sum_{n=2}^{\infty} \{n\,(n+1)\,F_{n+1} - n\,(n-1)\,F_n - nAF_n + (n+1)\,F_{n+1}C \\
&\qquad - nF_n\,(B+I) - AF_nB\}\,z^n + 2F_2 z - AF_1 z + F_1 C + 2F_2 C z \\
&\qquad - F_1\,(B+I)\,z - AF_0 B - AF_1 B z \\
&\quad = \sum_{n=2}^{\infty} \{(n+1)\,F_{n+1}\,(nI + C) - nF_n\,(B+nI) - AF_n\,(B+nI)\}\,z^n \\
&\qquad + (2F_2\,(C+I) - AF_1\,(B+I) - F_1\,(B+I))\,z + F_1 C - AF_0 B \\
&\quad = O
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada z nin kuvvetlerinin katsayıları O matrisine eşitlenirse,

$$\begin{aligned}
z^0 \quad &: \quad F_1 C - AF_0 B = O \\
&\quad\ \Rightarrow F_1 = AF_0 BC^{-1} \\
\\
z^1 \quad &: \quad 2F_2\left(C+I\right) - \left(A+I\right)F_1\left(B+I\right) = O \\
&\quad\ \Rightarrow F_2 = \frac{\left(A+I\right)F_1\left(B+I\right)\left(C+I\right)^{-1}}{2} \\
\\
z^n \quad &: \quad \left(n+1\right)F_{n+1}\left(C+nI\right) - \left(A+nI\right)F_n\left(B+nI\right) = O \\
&\quad\ \Rightarrow F_{n+1} = \frac{\left(A+nI\right)F_n\left(B+nI\right)\left(C+nI\right)^{-1}}{n+1} \quad , \quad n \geq 2
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Bu üç eşitlikten dikkat edilirse

$$F_{n+1} = \frac{\left(A+nI\right)F_n\left(B+nI\right)\left(C+nI\right)^{-1}}{n+1} \quad , \quad n \geq 0$$

yazılabilir. $F_0 = I$ olduğu dikkate alınarak, n yerine sırasıyla $0, 1, 2, ..., n-2, n-1, ...$ konulursa

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{ABC^{-1}}{1} \\
F_2 &= \frac{\left(A+I\right)F_1\left(B+I\right)\left(C+I\right)^{-1}}{2} \\
F_3 &= \frac{\left(A+2I\right)F_2\left(B+2I\right)\left(C+2I\right)^{-1}}{3} \\
&\vdots \\
F_{n-1} &= \frac{\left(A+\left(n-2\right)I\right)F_{n-2}\left(B+\left(n-2\right)I\right)\left(C+\left(n-2\right)I\right)^{-1}}{n-1} \\
F_n &= \frac{\left(A+\left(n-1\right)I\right)F_{n-1}\left(B+\left(n-1\right)I\right)\left(C+\left(n-1\right)I\right)^{-1}}{n} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olarak elde edilirler. F_1, F_2 de yerine yazılırsa

$$F_2 = \frac{\left(A+I\right)AB\left(B+I\right)C^{-1}\left(C+I\right)^{-1}}{1.2}$$

şeklindedir. Bu değer F_3 de yazıldığında ve düzenlendiğinde ise

$$F_3 = \frac{\left(A+2I\right)\left(A+I\right)AB\left(B+I\right)\left(B+2I\right)C^{-1}\left(C+I\right)^{-1}\left(C+2I\right)^{-1}}{1.2.3}$$

bulunacaktır. Bu şekilde devam edilirse, F_n katsayısı

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{(A+(n-1)I)(A+(n-2)I)...(A+I)AB(B+I)...(B+(n-2)I)}{1.2...(n-1)n} \\ &\quad \times (B+(n-1)I)C^{-1}(C+I)^{-1}...(C+(n-2)I)^{-1}(C+(n-1)I)^{-1} \\ &= \frac{(A)_n(B)_n[(C+(n-1)I)(C+(n-2)I)...(C+I)C]^{-1}}{n!} \\ &= \frac{(A)_n(B)_n(C)_n^{-1}}{n!} \quad , \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu durumda

$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)_n(B)_n(C)_n^{-1}}{n!} z^n = F(A,B;C;z)$$

şeklinde olup $W_1(0) = I$ ve $0 \leq |z| < 1$ olmak üzere $W_1(z) = F(A,B;C;z)$ hipergeometrik matris fonksiyonu, (3.54) denkleminin bir çözümüdür.

Sonuç 3.1 *$A, B, C \in \mathbb{C}^{r\times r}$ matrisleri için* (3.32) *ve* (3.53) *koşulları sağlanmak ve $F(A,B;C;0) = I$ olmak üzere, $F(A,B;C;z)$ hipergeometrik matris fonksiyonu*

$$z(1-z)W'' - zAW' + W'(C - z(B+I)) - AWB = O \ , \quad 0 \leq |z| < 1$$

denkleminin bir çözümüdür (Jódar and Cortés 1998a).

Sonuç 3.2 *n pozitif bir tamsayı, $A \in \mathbb{C}^{r\times r}$ keyfi bir matris ve $C \in \mathbb{C}^{r\times r}$,* (3.32) *koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere*

$$z(1-z)W'' - zAW' + W'(C + z(n-1)I) + nAW = O \qquad (3.55)$$

denklemi, n. dereceden matris polinom çözümlere sahiptir (Jódar and Cortés 1998a).

İspat. Sonuç 3.1 de $B = -nI$ matrisi alınırsa, $W(z) = F(A,-nI;C;z)$ matris fonksiyonu, $B = -nI$ için (3.54) denklemini sağlar. $j \geq 1$ için $(-nI)_{n+j} = O$ olduğundan

$$W(z) = F(A,-nI;C;z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(A)_k(-nI)_k(C)_k^{-1}}{k!} z^k$$

n. derecede matris polinomu, (3.55) denkleminin bir çözümüdür. ■

$A, B, C \in \mathbb{C}^{r\times r}$ matrisleri için (3.32) ve (3.53) koşullarına ek olarak

$$AC = CA \tag{3.56}$$

koşulu da sağlanmak üzere

$$z(1-z)W'' - zAW' + W'(C - z(B+I)) - AWB = O \quad , \quad 0 < |z| < 1 \tag{3.57}$$

şeklindeki hipergeometrik matris diferensiyel denklemini dikkate alalım.

Sonuç 3.1 den görülmektedir ki, bu denklemin çözümlerinden biri

$$W_1(z) = F(A, B; C; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)_n (B)_n (C)_n^{-1}}{n!} z^n \quad , \quad |z| < 1 \tag{3.58}$$

hipergeometrik matris fonksiyonudur.

D_0, negatif reel ekseni ve orjini içermeyen orjin merkezli bir bölge olsun. $z^{I-C} = \exp[(I-C)\ln z]$ ile gösterilmek üzere (3.57) denkleminin

$$W_2(z) = V(z)\, z^{I-C} \quad ; \quad |z| < 1 \ , \quad z \in D_0$$

tipinde bir çözümünü araştıralım. Dolayısıyla buradaki $V(z)$ fonksiyonu belirlenmelidir. Ayrıca belirtelim ki,

$$z^{I-C} = \exp[(I-C)\ln z] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(I-C)^n \ln^n z}{n!}$$

olduğundan ve (3.32) eşitliğinden dolayı

$$Bz^{I-C} = z^{I-C}B$$

yazılabilir. Çözümün denklemi sağlama koşulundan $W_2(z)$ nin ifadesi ve

$$\begin{aligned} W_2'(z) &= V'(z)\, z^{I-C} + V(z)\, z^{-C}(I-C) \\ W_2''(z) &= V''(z)\, z^{I-C} + 2V'(z)\, z^{-C}(I-C) - V(z)\, z^{-C-I}C(I-C) \end{aligned}$$

türevleri (3.57) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&z\left(1-z\right)W_2''\left(z\right)-zAW_2'\left(z\right)+W_2'\left(z\right)\left(C-z\left(B+I\right)\right)-AW_2\left(z\right)B \\
&= z\left(1-z\right)\left[V''z^{I-C}+2V'z^{-C}\left(I-C\right)-Vz^{-C-I}C\left(I-C\right)\right] \\
&\quad -zA\left[V'z^{I-C}+Vz^{-C}\left(I-C\right)\right] \\
&\quad +\left[V'z^{I-C}+Vz^{-C}\left(I-C\right)\right]\left(C-z\left(B+I\right)\right)-AVz^{I-C}B \\
&= z\left(1-z\right)V''z^{I-C}+2\left(1-z\right)V'z^{I-C}\left(I-C\right)-\left(1-z\right)Vz^{-C}C\left(I-C\right) \\
&\quad -zAV'z^{I-C}-AVz^{I-C}\left(I-C\right)+V'z^{I-C}C-zV'z^{I-C}\left(B+I\right) \\
&\quad +Vz^{-C}C\left(I-C\right)-Vz^{I-C}\left(I-C\right)\left(B+I\right)-AVz^{I-C}B \\
&= \{z\left(1-z\right)V''+2\left(1-z\right)V'\left(I-C\right)+VC\left(I-C\right)-zAV' \\
&\quad -AV\left(I-C\right)+V'C-zV'\left(B+I\right)-V\left(I-C\right)\left(B+I\right)-AVB\}\,z^{I-C} \\
&= \big\{z\left(1-z\right)V''+2V'-2V'C-2zV'+2zV'C+VC-VC^2-zAV' \\
&\quad -AV+AVC+V'C-zV'B-zV'-VB-V+VCB+VC-AVB\}\,z^{I-C} \\
&= \{z\left(1-z\right)V''+2V'-V'C-3zV'+2zV'C-zAV'-zV'B \\
&\quad +VC-VC^2-AV+AVC-VB-V+VCB+VC-AVB\big\}\,z^{I-C} \\
&= O
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

olarak bulunur. $z\in D_0$ için $z^{I-C}=\exp\left[\left(I-C\right)\ln z\right]\neq O$ olduğunu gözönünde bulundurarak bir an için

$$
V\left(z\right)C=CV\left(z\right) \quad \text{ve} \quad V'\left(z\right)C=CV'\left(z\right) \tag{3.60}
$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda (3.59) eşitliği

$$
\begin{aligned}
&z\left(1-z\right)V''+2V'-V'C-3zV'+2zV'C-zAV'-zV'B \\
&+VC-VC^2-AV+AVC-VB-V+VCB+VC-AVB \\
&\quad =z\left(1-z\right)V''+2V'-V'C-2zV'-zV'+zCV'+zV'C-zAV'-zV'B \\
&\quad +VC\left(I-C\right)-AV\left(I-C\right)-V\left(B+I-C\right)+CVB-AVB \\
&\quad =z\left(1-z\right)V''+V'\left(2I-C\right)-z\left(I-C+A\right)V'-zV'\left(2I+C+B\right) \\
&\quad +\left(C-A\right)V\left(I-C\right)-V\left(B+I-C\right)+\left(C-A\right)VB \\
&\quad =z\left(1-z\right)V''-z\left(A+I-C\right)V'+V'\left(2I-C\right)-zV'\left(B+2I+C\right) \\
&\quad +\left(C-A\right)V\left(I-C+B\right)-V\left(B+I-C\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= z\left(1-z\right)V'' - z\left(A+I-C\right)V' + V'\left[\left(2I-C\right) - z\left(B+2I+C\right)\right] \\
&- \left(A+I-C\right)V\left(B+I-C\right) \\
&= O
\end{aligned}
$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Yani

$$
\begin{aligned}
&z\left(1-z\right)V'' - z\left(A+I-C\right)V' \\
&+ V'\left[\left(2I-C\right) - z\left(B+2I+C\right)\right] - \left(A+I-C\right)V\left(B+I-C\right) = O
\end{aligned} \tag{3.61}
$$

bulunur. Dikkat edilirse, (3.61) denklemi

$$
A^{*} = A+I-C \quad , \quad B^{*} = B+I-C \ , \quad C^{*} = 2I-C
$$

olmak üzere, (3.57) denkleminin tipindendir. (3.53) koşulundan dolayı

$$
\left(B+I-C\right)\left(2I-C\right) = \left(2I-C\right)\left(B+I-C\right)
$$

sağlandığından, (3.61) denkleminin çözümlerinden biri (3.58) den yararlanarak

$$
V\left(z\right) = F\left(A+I-C,\ B+I-C\ ;2I-C;z\right) \quad , \quad 0<\left|z\right|<1 \tag{3.62}
$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca (3.62) çözümünün bulunmasında varsayılan (3.60) kabulünün de doğruluğu gerçeklenmiş olur. Bu durumda (3.57) denkleminin

$$
W_2\left(z\right) = F\left(A+I-C,\ B+I-C\ ;2I-C;z\right)z^{I-C}\ ;\ \ 0<\left|z\right|<1,\ z\in D_0 \tag{3.63}
$$

tipinde bir başka çözümü elde edilmiş olur.

Sonuç 3.3 $A, B, C \in \mathbb{C}^{r\times r}$ *matrisleri için* (3.32), (3.53) *ve* (3.56) *koşulları sağlanmak üzere,* $0<\left|z\right|<1$ *ve* $z\in D_0$ *için*

$$
\left.
\begin{aligned}
W_1\left(z\right) &= F\left(A,B;C;z\right) \\
W_2\left(z\right) &= F\left(A+I-C,\ B+I-C\ ;2I-C;z\right)z^{I-C}
\end{aligned}
\right\} \tag{3.64}
$$

matris fonksiyonları, (3.57) *hipergeometrik matris diferensiyel denkleminin çözümleridir (Jódar and Cortés 2000).*

$\rho < 1$ ve $\Omega(\rho) = \{z \in D_0\ ,\ 0 < |\ z\ | < \rho\}$ olmak üzere,

$$S(z) = \begin{bmatrix} W_1(z) & W_2(z) \\ W_1'(z) & W_2'(z) \end{bmatrix}$$

blok matrisi $\Omega(\rho)$ de regüler ise, bu bölgede $\{W_1, W_2\}$ çifti (3.57) denkleminin temel çözümler cümlesidir. Gerçekten de, $S(z)$ matrisini regüler yapan $\Omega(\rho)$ bölgesi vardır. Fakat bu bölgeyi belirlemede kullanılan ρ nun hesabı oldukça karmaşık ve uzundur.

Teorem 3.8 *$A, B, C \in \mathbb{C}^{r\times r}$ matrisleri için* (3.32), (3.53) *ve* (3.56) *koşulları sağlansın. $0 < |z| < 1$ ve $z \in D_0$ için W_1 ve W_2 ,* (3.64) *ile verilmek üzere,*
$\Omega(\rho) = \{z \in D_0\ ,\ 0 < |z| < \rho\}$ bölgesinde (3.57) *denkleminin genel çözümü*

$$W(z) = W_1(z)\,P + W_2(z)\,Q \quad , \quad P, Q \in \mathbb{C}^{r\times r}$$

olacak şekilde $\rho < 1$ pozitif sayısı vardır (Jódar and Cortés 2000).

4. MATRİS KATSAYILI ORTOGONAL POLİNOMLAR

4.1 Laguerre Matris Polinomları

$\lambda \in \mathbb{C}$, t reel değişken ve $A, C, X(t) \in \mathbb{C}^{r\times r}$ olmak üzere, (1.1) ile verilen diferensiyel denklem sisteminden

$$tX''(t) + (A + I - \lambda t I)X'(t) + CX(t) = O \tag{4.1}$$

formundaki matris diferensiyel denklemini gözönüne alalım. (4.1) sisteminin skaler durumdaki denklemleri vermesi için A ve C matrisleri aynı anda köşegenleştirilebilir olmalıdır.

$k \geq 0$ için C_k lar belirlenecek matrisler olmak üzere (4.1) matris diferensiyel denkleminin

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, t^k \quad , \qquad C_k \in \mathbb{C}^{r\times r}$$

formunda serisel çözümünü araştıralım. Buradan t ye göre türevler alınırsa

$$X'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, C_k\, t^{k-1} \quad , \qquad X''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k\ (k-1)\ C_k\, t^{k-2}$$

bulunur. Bu tipteki çözümün denklemi sağlama koşulundan, kendisi ve t ye göre türevleri denklemde yerlerine yazılırsa

$$\sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\, C_k\, t^{k-1} + (A+I)\sum_{k=1}^{\infty} kC_k\, t^{k-1} - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} kC_k\, t^k + C\sum_{k=0}^{\infty} C_k\, t^k = O$$

olup eşitliğin solundaki birinci ve ikinci toplamlarda k yerine $k+1$ alınır ve t^k nın kuvvetine göre düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} k\,(k+1)\, C_{k+1} t^k + (A+I)\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, C_{k+1} t^k - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} kC_k\, t^k + C\sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k \quad &= \quad O \\
(A+I)\, C_1 + CC_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{(k+1)\,[A+(k+1)I]\ C_{k+1} - (\lambda k I - C)\, C_k\}\, t^k \quad &= \quad O
\end{aligned}$$

elde edilir. t nin katsayılarının sıfır matrisine eşitlenmesiyle C_k ların

$$\begin{aligned}
(A+I)C_1 + CC_0 \quad &= \quad O \\
(k+1)\,[\,A + (k+1\,)I]\, C_{k+1} - (\lambda k I - C)\, C_k \quad &= \quad O \quad , \qquad k \geq 1
\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlaması gerektiği görülür. Bu iki eşitlikten,

$$(k+1)\left[A+(k+1)I\right]C_{k+1}-(\lambda kI-C)\,C_k=O \quad , \quad k\geq 0 \tag{4.2}$$

indirgeme bağıntısı bulunur.

$$-m\notin\sigma\left(A\right) \quad , \quad \forall m\in\mathbb{Z}^{+} \tag{4.3}$$

spektral koşulu altında (4.2) den

$$C_k=\frac{\left[A+kI\,\right]^{-1}\left[\lambda\left(k-1\right)I-C\right]}{k}C_{k-1} \quad , \quad k\geq 1 \tag{4.4}$$

yazılabilir. (4.1) denkleminin matris polinom çözümlerinin varlığını garanti etmek için, (4.4) den de görülmektedir ki,

$$C=\lambda nI \quad , \quad \text{negatif olmayan bazı } n \text{ tamsayıları için} \tag{4.5}$$

koşulu yeterlidir. Bu durumda (4.1) denklemi

$$tX''\left(t\right)+\left(A+I-\lambda tI\right)X'\left(t\right)+\lambda nX\left(t\right)=O \tag{4.6}$$

şeklini alır. Öte yandan (4.5), (4.4) de yerine yazılırsa

$$C_k=\frac{\left[\,A+k\,I\,\right]^{-1}\lambda\left(\,k-n-1\right)}{k}C_{k-1} \quad , \quad 1\leq k\leq n \ , \ C_0\in\mathbb{C}^{r\times r}$$

olup k yerine sırasıyla $1,2,3,...,k-1,k,...$ konulursa

$$\begin{aligned}
C_1 &= \tfrac{\left[A+I\right]^{-1}\lambda(-n)}{1}C_0\\
C_2 &= \tfrac{\left[A+2I\right]^{-1}\lambda(1-n)}{2}C_1\\
C_3 &= \tfrac{\left[A+3I\right]^{-1}\lambda(2-n)}{3}C_2\\
&\vdots\\
C_{k-1} &= \tfrac{\left[A+(k-1)I\,\right]^{-1}\lambda(k-2-n)}{k-1}C_{k-2}\\
C_k &= \tfrac{\left[A+kI\,\right]^{-1}\lambda(k-1-n)}{k}C_{k-1}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

elde edilir. C_1, C_2 nin eşitinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{\left[\,A+2I\,\right]^{-1}\lambda\left(1-n\right)}{2}\,\frac{\left[A+I\,\right]^{-1}\lambda\left(-n\right)}{1}\\
&= \frac{\lambda^2\left(1-n\right)\left(-n\right)}{1.2}\left[A+2I\,\right]^{-1}\left[\,A+I\,\right]^{-1}C_0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu değer C_3 de yerine yazıldığında ve düzenlendiğinde ise

$$C_3 = \frac{\lambda^3 (2-n)(1-n)(-n)}{1.2.3} [A+3I]^{-1} [A+2I]^{-1} [A+I]^{-1} C_0$$

bulunacaktır. Bu şekilde devam edilirse, (2.3) gösterimi de dikkate alınarak C_k katsayısı C_0 matrisi cinsinden

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{\lambda^k (k-1-n)(k-2-n)\ldots(1-n)(-n)}{1.2.3\ldots(k-1)k} \\ &\quad \times [A+kI]^{-1} [A+(k-1)I]^{-1} \ldots [A+2I]^{-1} [A+I]^{-1} C_0 \\ &= \frac{\lambda^k (-1)^k (n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-1)(n)}{k!} \\ &\quad \times \{[A+I][A+2I]\ldots[A+(k-1)I][A+kI]\}^{-1} C_0 \\ &= \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!} \frac{1.2\ldots(n-k)(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-1)(n)}{1.2\ldots(n-k)} (A+I)_k^{-1} C_0 \\ &= \frac{(-1)^k \lambda^k n!}{k!(n-k)!} (A+I)_k^{-1} C_0 \quad , \qquad 1 \le k \le n \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Amaca uygun olması bakımından, $C_0 = \dfrac{(A+I)_n}{n!}$ olarak seçilirse

$$C_k = \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!\,(n-k)!} (A+I)_n (A+I)_k^{-1}$$

olup (4.6) denkleminin, karşılık gelen serisel çözümü

$$X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!\,(n-k)!} (A+I)_n (A+I)_k^{-1} t^k \tag{4.7}$$

olarak bulunur ki, bu n. dereceden bir matris polinomudur. (4.6) ve (4.7) de $r=1$ ve $\lambda = 1$ alınırsa, sırasıyla skaler durumdaki Laguerre diferensiyel denklemi ve polinom çözümü elde edilir.

I. Laguerre Matris Polinomlarının İfadesi

Kabul edelim ki $A \in \mathbb{C}^{r\times r}$, (4.3) koşulunu sağlayan bir matris ve λ, $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ olacak şekilde bir kompleks sayı olsun. $|w| < 1$ için t ve w nın kompleks değişkenlerinin

$$G(t,w) = (1-w)^{-(A+I)} \exp\left(\frac{-\lambda t w}{1-w}\right) \tag{4.8}$$

matris değerli fonksiyonunu dikkate alalım. $|w| < 1$ için $G(t,w)$, w kompleks değişkeninin analitik bir fonksiyondur. Bu nedenle G, $w = 0$ noktasında

$$G(t,w) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(A,\lambda)}(t)\ w^n \tag{4.9}$$

şeklinde bir kuvvet serisi ile gösterilebilir. Öte yandan (4.8) den

$$\begin{aligned} G(t,w) &= (1-w)^{-(A+I)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n t^n w^n}{n!\ (1-w)^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n t^n w^n}{n!} (1-w)^{-(A+(n+1)I)} \end{aligned} \tag{4.10}$$

yazılabilir. $F(w) = (1-w)^{-(A+(n+1)I)}$ matris değerli fonksiyonunun $w = 0$ noktasındaki Taylor açılımı

$$F(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+(n+1)I)\ldots(A+(n+k)I)}{k!} w^k$$

şeklindedir. (4.3) koşulu altında (2.3) gösterimini de dikkate alarak $F(w)$ nın serisel ifadesi

$$F(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+I)_{n+k}(A+I)_n^{-1}}{k!} w^k$$

şeklini alır. Bu sonuç (4.10) da yerine yazılırsa

$$G(t,w) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n t^n w^{n+k}}{n!\,k!} (A+I)_{n+k}(A+I)_n^{-1}$$

olup burada

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} D(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} D(n-k,k)$$

gösteriminden yararlanılırsa

$$G(t,w) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \lambda^k t^k}{(n-k)!\,k!}(A+I)_n (A+I)_k^{-1}\right] w^n \tag{4.11}$$

olarak bulunur. (4.9) ve (4.11) den

$$G(t,w) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(A,\lambda)}(t)\, w^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \lambda^k t^k}{(n-k)!\,k!}(A+I)_n (A+I)_k^{-1}\right] w^n$$

olup, n. dereceden $L_n^{(A,\lambda)}(t)$ Laguerre matris polinomunun ifadesi

$$L_n^{(A,\lambda)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \lambda^k}{(n-k)!\,k!}\ (A+I)_n (A+I)_k^{-1}\, t^k \tag{4.12}$$

şeklinde elde edilir (Jodar *et al.* 1994). (4.8) ve (4.12) de $r=1$ ve $\lambda=1$ alınırsa, sırasıyla skaler durumdaki Laguerre polinomları için doğurucu fonksiyon ve Laguerre polinomlarının açık ifadesi elde edilir.

II. Laguerre Matris Polinomları İçin Üç Terimli Matris Rekürans Bağıntısı

(4.8) den de görüldüğü gibi $|w|<1$ için $G(t,w)$, w değişkeninin analitik ve $\mathbb{C}^{r\times r}$ değerli bir fonksiyonudur. (4.8) den w ya göre türev alındığında

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(t,w)}{\partial w} &= (A+I)(1-w)^{-(A+2I)}\exp\left(\frac{-\lambda tw}{1-w}\right)\\
&\quad +(1-w)^{-(A+I)}\left[\frac{-\lambda t(1-w)-\lambda tw}{(1-w)^2}\right]\exp\left(\frac{-\lambda tw}{1-w}\right)\\
&= (A+I)(1-w)^{-(A+2I)}\exp\left(\frac{-\lambda tw}{1-w}\right)\\
&\quad -\lambda t\,(1-w)^{-(A+I)}(1-w)^{-2}\exp\left(\frac{-\lambda tw}{1-w}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanı $(1-w)^2$ ile çarpılır ve (4.8) kullanılırsa

$$(1-w)^2\frac{\partial G(t,w)}{\partial w}+[\lambda tI-(A+I)(1-w)]\,G(t,w)=O \tag{4.13}$$

bulunur. (4.9) eşitliğinde de w ya göre türev alınırsa

$$\frac{\partial G(t,w)}{\partial w}=\sum_{n=1}^{\infty}nL_n^{(A,\lambda)}(t)\,w^{n-1}$$

olup bu değeri ve (4.9) deki G yi (4.13) de yerlerine yazarsak,

$$(1-w)^2\sum_{n=1}^{\infty}nL_n^{(A,\lambda)}(t)\,w^{n-1}+[\lambda tI-(A+I)(1-w)]\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(A,\lambda)}(t)\,w^n=O$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}nL_n^{(A,\lambda)}(t)\,w^{n-1}-2\sum_{n=1}^{\infty}nL_n^{(A,\lambda)}(t)\,w^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}nL_n^{(A,\lambda)}(t)\,w^{n+1}\\
&+\lambda t\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(A,\lambda)}(t)\,w^n-(A+I)\left[\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(A,\lambda)}(t)\,w^n-\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(A,\lambda)}(t)\,w^{n+1}\right]=O
\end{aligned} \tag{4.14}$$

bulunur. (4.14) de, w nın kuvvetlerinin düzenlenmiş katsayıları sıfır matrisine eşitlenirse

$$L_1^{(A,\lambda)}(t)=(A+I)\,L_0^{(A,\lambda)}(t)-\lambda tL_0^{(A,\lambda)}(t)$$

ve

$$(n+1)\,L_{n+1}^{(A,\lambda)}(t)-2nL_{n}^{(A,\lambda)}(t)+(n-1)\,L_{n-1}^{(A,\lambda)}(t)+\lambda tL_{n}^{(A,\lambda)}(t)$$
$$+(A+I)\,L_{n-1}^{(A,\lambda)}(t)-(A+I)\,L_{n}^{(A,\lambda)}(t)=O\ ,\quad n\geq 1$$

elde edilir. Buradan üç terimli matris rekürans bağıntısı

$$(n+1)\,L_{n+1}^{(A,\lambda)}(t)+[\lambda tI-(A+(2n+1)\,I)]\,L_{n}^{(A,\lambda)}(t)+(A+nI)\,L_{n-1}^{(A,\lambda)}(t)=O\ ,\quad n\geq 1 \tag{4.15}$$

şeklinde bulunur (Jodar *et al.* 1994). Burada $r=1$ ve $\lambda=1$ alınırsa, skaler durumdaki Laguerre polinomları için üç terimli rekürans bağıntısı elde edilir.

III. Laguerre Matris Diferensiyel Denklemi

(4.8) deki $G(t,w)$, t değişkeninin tam ve $\mathbb{C}^{r\times r}$ değerli bir fonksiyonudur. (4.8) den t ye göre türev alınırsa

$$\frac{\partial G(t,w)}{\partial t}=\frac{-\lambda w}{1-w}\,(1-w)^{-(A+I)}\exp\left(\frac{-\lambda tw}{1-w}\right)$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanı $1-w$ ile çarpılır ve (4.8) kullanılırsa

$$(1-w)\,\frac{\partial G(t,w)}{\partial t}+\lambda wG(t,w)=O \tag{4.16}$$

elde edilir. $D=\dfrac{d}{dt}$ olmak üzere (4.9) seri açılımında t ye göre terim terime türev alınırsa

$$\frac{\partial G(t,w)}{\partial t}=\sum_{n=0}^{\infty}DL_{n}^{(A,\lambda)}(t)\;w^{n}$$

olup bu değer ve (4.9), (4.16) da yazılırsa

$$\begin{aligned}(1-w)\sum_{n=0}^{\infty}DL_{n}^{(A,\lambda)}(t)\,w^{n}+\lambda w\sum_{n=0}^{\infty}L_{n}^{(A,\lambda)}(t)\;w^{n}&=O\\ \sum_{n=0}^{\infty}DL_{n}^{(A,\lambda)}(t)\,w^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}DL_{n}^{(A,\lambda)}(t)\,w^{n+1}+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}L_{n}^{(A,\lambda)}(t)\,w^{n+1}&=O\end{aligned} \tag{4.17}$$

bulunur. (4.17) de w nın kuvvetlerinin aynı dereceli olanlarının katsayıları sıfır matrisine eşitlenirse

$$DL_{n}^{(A,\lambda)}(t)-DL_{n-1}^{(A,\lambda)}(t)+\lambda L_{n-1}^{(A,\lambda)}(t)=O\ ,\quad n\geq 1 \tag{4.18}$$

eşitliği bulunacaktır. (4.15) üç terimli matris rekürans bağıntısında t ye göre türev alındığında

$$(n+1)\,DL_{n+1}^{(A,\lambda)}(t)+[\lambda tI-(A+(2n+1)\,I)]\,DL_{n}^{(A,\lambda)}(t) \\ +(A+nI)\,DL_{n-1}^{(A,\lambda)}(t)+\lambda L_{n}^{(A,\lambda)}(t)=O$$

olup (4.18) den $DL_{n-1}^{(A,\lambda)}(t)$ çekilip yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$(n+1)\,DL_{n+1}^{(A,\lambda)}(t)+[\lambda tI-(A+(2n+1)\,I)]\,DL_{n}^{(A,\lambda)}(t) \\ +(A+nI)\,DL_{n}^{(A,\lambda)}(t)+\lambda\,(A+nI)\,L_{n-1}^{(A,\lambda)}(t)+\lambda L_{n}^{(A,\lambda)}(t)=O \qquad (4.19)$$

bulunur. (4.15) den $(A+nI)\,L_{n-1}^{(A,\lambda)}(t)$ çekilip (4.19) da kullanılırsa

$$(n+1)\,DL_{n+1}^{(A,\lambda)}(t)+[\lambda tI-(n+1)\,I]\,DL_{n}^{(A,\lambda)}(t) \\ -\lambda\,(n+1)\,L_{n+1}^{(A,\lambda)}(t)-\lambda\,[\lambda tI-(A+(2n+2)\,I)]\,L_{n}^{(A,\lambda)}(t)=O \qquad (4.20)$$

elde edilir. (4.18) in her iki yanı $(\lambda t-n)\,I$ ile çarpılırsa

$$(\lambda t-n)\,DL_{n}^{(A,\lambda)}(t)-(\lambda t-n)\,DL_{n-1}^{(A,\lambda)}(t)+\lambda\,(\lambda t-n)\,L_{n-1}^{(A,\lambda)}(t)=O$$

olup buradan

$$nDL_{n}^{(A,\lambda)}(t)+(\lambda t-n)\,DL_{n-1}^{(A,\lambda)}(t)=\lambda tDL_{n}^{(A,\lambda)}(t)+\lambda\,(\lambda t-n)\,L_{n-1}^{(A,\lambda)}(t) \qquad (4.21)$$

yazılabilir. (4.20) de n yerine $n-1$ alınırsa

$$nDL_{n}^{(A,\lambda)}(t)+(\lambda t-n)\,DL_{n-1}^{(A,\lambda)}(t)-\lambda nL_{n}^{(A,\lambda)}(t)-\lambda\,[\lambda tI-(A+2nI)]\,L_{n-1}^{(A,\lambda)}(t)=O$$

bulunur ve burada (4.21) eşitliğinin sağ yanı yerine yazılırsa

$$\lambda tDL_{n}^{(A,\lambda)}(t)+\lambda\,(\lambda t-n)\,L_{n-1}^{(A,\lambda)}(t)-\lambda nL_{n}^{(A,\lambda)}(t)-\lambda\,[\lambda tI-(A+2nI)]\,L_{n-1}^{(A,\lambda)}(t)=O$$

olup

$$\lambda tDL_{n}^{(A,\lambda)}(t)-\lambda nL_{n}^{(A,\lambda)}(t)+\lambda\,(A+nI)\,L_{n-1}^{(A,\lambda)}(t)=O \qquad (4.22)$$

ifadesi elde edilir. D operatörünü kullanarak bu eşitliğin her iki yanının t ye göre türevi alındığında

$$\lambda tD^{2}L_{n}^{(A,\lambda)}(t)+\lambda\,(1-n)\,DL_{n}^{(A,\lambda)}(t)+\lambda\,(A+nI)\,DL_{n-1}^{(A,\lambda)}(t)=O \qquad (4.23)$$

elde edilir. (4.18) den

$$\lambda L_{n-1}^{(A,\lambda)}(t) = DL_{n-1}^{(A,\lambda)}(t) - DL_{n}^{(A,\lambda)}(t)$$

olup bu ifade (4.22) de yerine yazılırsa

$$\lambda tDL_{n}^{(A,\lambda)}(t) - \lambda nL_{n}^{(A,\lambda)}(t) + (A+nI)\,DL_{n-1}^{(A,\lambda)}(t) - (A+nI)\,DL_{n}^{(A,\lambda)}(t) = O$$

bulunur. Buradan elde edilen $(A+nI)\,DL_{n-1}^{(A,\lambda)}(t)$ değeri (4.23) de kullanılırsa

$$\lambda tD^{2}L_{n}^{(A,\lambda)}(t) + \lambda(1-n)\,DL_{n}^{(A,\lambda)}(t) - \lambda^{2}tDL_{n}^{(A,\lambda)}(t) \\ + \lambda^{2}nL_{n}^{(A,\lambda)}(t) + \lambda(A+nI)\,DL_{n}^{(A,\lambda)}(t) = O$$

$$tD^{2}L_{n}^{(A,\lambda)}(t) + (A+I-\lambda t)\,DL_{n}^{(A,\lambda)}(t) + \lambda nL_{n}^{(A,\lambda)}(t) = O$$

elde edilir ki bu bize, n. dereceden $L_{n}^{(A,\lambda)}(t)$ Laguerre matris polinomunun

$$tX''(t) + (A+I-\lambda tI)X'(t) + \lambda nX(t) = O$$

matris diferensiyel denkleminin bir çözümü olduğunu gösterir (Jodar *et al.* 1994). Burada $r=1$ ve $\lambda=1$ alınırsa, skaler durumdaki Laguerre diferensiyel denklemi elde edilir.

IV. Laguerre Matris Polinomları İçin Rodrigues Formülü

Kabul edelim ki, $A \in \mathbb{C}^{r\times r}$ matrisi (4.3) koşulunu sağlasın. Bu durumda, $D = \dfrac{d}{dt}$ olmak üzere

$$D^{n-k}t^{A+nI} = (A+nI)\,(A+(n-1)\,I)\ldots(A+(k+1)\,I)\;t^{A+kI}$$

olup bu ifade, (2.3) den yararlanarak

$$D^{n-k}t^{A+nI} = (A+I)_{n}\;(A+I)_{k}^{-1}\;t^{A+kI}$$

şeklinde yazılabilir.

$$D^{k}e^{-t\lambda} = (-1)^{k}\,\lambda^{k}e^{-t\lambda}$$

olduğundan iki ifadenin çarpımının n. türevi için Leibnitz kuralından ve fonksiyonel matris hesabından

$$\begin{aligned} D^n\left[e^{-t\lambda}\,t^{A+nI}\right] &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(D^{n-k}t^{A+nI}\right)\left(D^k e^{-t\lambda}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\,(A+I)_n\,(A+I)_k^{-1}\,t^{A+kI}\,(-1)^k\,\lambda^k e^{-t\lambda} \\ &= n!t^A e^{-t\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,\lambda^k}{(n-k)!\,k!}\,(A+I)_n\,(A+I)_k^{-1}\,t^k \end{aligned}$$

bulunur. Burada (4.12) eşitliği dikkate alınırsa, Laguerre matris polinomları için Rodrigues formülü

$$L_n^{(A,\lambda)}(t)=\frac{t^{-A}\,e^{t\lambda}}{n!}D^n\left[e^{-t\lambda}\,t^{A+nI}\right]\quad ,\qquad n\geq 0 \tag{4.24}$$

şeklinde elde edilir (Jodar *et al.* 1994). Burada $r=1$ ve $\lambda=1$ alınırsa, skaler durumdaki Laguerre polinomları için Rodrigues formülü elde edilir.

V. Laguerre Matris Polinomlarının Ortogonalliği

İlk olarak, ortogonalliğin ispatında kullanılacak bir teoremi verelim.

Teorem 4.1 *A matrisi $\mathbb{C}^{r\times r}$ de*

$$\operatorname{Re}(z)>-1\quad ,\quad \forall z\in\sigma(A) \tag{4.25}$$

spektral şartını sağlayan bir matris ve λ, $\operatorname{Re}(\lambda)>0$ olacak şekilde bir kompleks sayı olsun. Bu durumda

i) *Herhangi belirli bir $P(t)$ matris polinomu için*

$$t^{A+I}=\exp\left[(A+I)\ln t\right]\quad ,\quad t>0$$

olmak üzere

$$\lim_{t\to 0^+} e^{-\lambda t}\,t^{A+I}\,P(t)=O\quad ve\quad \lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t}\,t^{A+I}\,P(t)=O \tag{4.26}$$

ii) *n pozitif bir tamsayı ve ,*

$$\lambda^{-(n+1)I-A}=\exp\left[-\left(A+(n+1)\,I\right)\ln\lambda\right]$$

olmak üzere

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,t^{A+nI}\,dt=\lambda^{-(n+1)I-A}\,\Gamma\left(A+(n+1)\,I\right) \tag{4.27}$$

eşitlikleri gerçerlidir (Jodar et al. 1994).

İspat. i) Lemma 2.8 ve Lemma 2.10 dan

$$\left\|t^{A+I}\right\| = \|\exp\left[(A+I)\ln t\right]\| \leq t^{a(A)+1} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\|N\|^j \left|\ln t\right|^j}{j!} \tag{4.28}$$

dir. $0 \leq j \leq r-1$ için

$$\lim_{t\to 0^+} t^{a(A)+1} \left|\ln t\right|^j = 0$$

ve $t \to 0^+$ için $e^{-\lambda t}P(t)$ sınırlı olduğundan, bu sonuçlar (4.28) de dikkate alınırsa

$$\lim_{t\to 0^+} e^{-\lambda t}\, P(t)\; t^{A+I} = O$$

dır. $0 \leq k \leq s$ için $P_k \in \mathbb{C}^{r\times r}$ olmak üzere $P(t) = P_0 + tP_1 + \ldots + t^s P_s$ şeklinde olsun. (4.28) eşitisizliğini ve

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t\,\mathrm{Re}(\lambda)}\; t^{a(A)+1+k} \left|\ln t\right|^j = 0$$

olduğunu dikkate alarak

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t} P(t)\; t^{A+I} = O$$

olarak elde edilir.

ii) Skaler

$$g(z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^{z+n}\, dt \quad , \qquad \mathrm{Re}(z) > -1 \tag{4.29}$$

fonksiyonu dikkate alındığında, bu fonksiyon $\mathrm{Re}(z) > -1$ yarı-düzleminde analitiktir. (4.29) eşitliğinde $\lambda t = u$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^{z+n}\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{z+n} \frac{1}{\lambda} du \\ &= \lambda^{-z-n-1} \int_0^\infty e^{-u} u^{(z+n+1)-1} du \\ &= \lambda^{-z-n-1}\, \Gamma(z+n+1) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Fonksiyonel matris hesabının $g(z)$ ye uygulanmasıyla

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^{A+nI}\, dt = \lambda^{-(n+1)I-A}\Gamma(A+(n+1)I)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.2 *A, $\mathbb{C}^{r\times r}$ de (4.25) koşulunu sağlayan bir matris,* $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ *olacak şekilde λ kompleks bir sayı ve*

$$W(t) = e^{-\lambda t} t^{A} \quad , \qquad t > 0$$

olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^n I) &= \int_0^\infty W(t)\, t^n dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^A t^n dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^{A+nI} dt \quad ; \qquad n = 0, 1, ... \end{aligned} \tag{4.30}$$

olmak üzere, $L_n^{(A,\lambda)}(t)$ Laguerre matris polinomlarının $\left\{L_n^{(A,\lambda)}(t)\right\}_{n\geq 0}$ dizisi
i. *$L_n^{(A,\lambda)}(t)$, singüler olmayan başkatsayılı n. dereceden bir matris polinomudur,*
ii. *$\forall n, s \in \mathbb{N}$ ve $n \neq s$ için $\mathcal{L}\left(L_n^{(A,\lambda)}(t)\ L_s^{(A,\lambda)}(t)\right) = O$ dır,*
iii. *$n \geq 0$ için $\mathcal{L}\left(\left(L_n^{(A,\lambda)}(t)\right)^2\right)$ nin tersi vardır,*
koşullarını sağladığından, $\mathcal{L}$ matris moment fonksiyoneline göre matris ortogonal polinom dizisi*dir (Jodar et al. 1994).*

İspat. i) (4.12) den de görülmektedir ki, $L_n^{(A,\lambda)}(t)$ Laguerre matris polinomu n. derecedendir ve başkatsayısı singüler olmayan $\dfrac{(-1)^n \lambda^n I}{n!}$ matrisidir. Dolayısıyla tersi vardır.

ii) $n \neq s$ olmak üzere (4.24) ve (4.30) dan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(L_n^{(A,\lambda)}(t)\ L_s^{(A,\lambda)}(t)\right) &= \int_0^\infty W(t)\ L_n^{(A,\lambda)}(t)\ L_s^{(A,\lambda)}(t)\ dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^A \frac{t^{-A} e^{t\lambda}}{n!} D^n \left[e^{-t\lambda} t^{A+nI}\right] L_s^{(A,\lambda)}(t)\ dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty D^n \left[e^{-t\lambda}\, t^{A+nI}\right]\ L_s^{(A,\lambda)}(t)\ dt \end{aligned} \tag{4.31}$$

dir. Kabul edelim ki, $n > s$ olsun. Bu takdirde Teorem 4.1.i den

$$\left[\left\{D^{n-k}\left(e^{-\lambda t}\, t^{A+nI}\right)\right\}\left\{D^{k-1} L_s^{(A,\lambda)}(t)\right\}\right]_{t=0}^{t=\infty} = O \quad , \qquad 0 < k \leq n \tag{4.32}$$

dir. (4.31) eşitliğinin sağındaki integrale n defa kısmi integrasyon uygulanırsa ve (4.32) eşitliği de dikkate alınarak

$$\mathcal{L}\left(L_n^{(A,\lambda)}(t)\ L_s^{(A,\lambda)}(t)\right) = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty e^{-t\lambda}\, t^{A+nI}\left[D^n L_s^{(A,\lambda)}(t)\right] dt \tag{4.33}$$

olarak bulunur. $L_s^{(A,\lambda)}(t)$, s. dereceden bir matris polinomu olduğundan

$$D^n L_s^{(A,\lambda)}(t) = O \quad , \quad n > s$$

olup bu sonuç (4.33) eşitliğinde kullanılırsa

$$\mathcal{L}\left(L_n^{(A,\lambda)}(t)\ L_s^{(A,\lambda)}(t)\right) = \mathcal{L}\left(L_s^{(A,\lambda)}(t)\ L_n^{(A,\lambda)}(t)\right) = O \quad , \quad n \neq s$$

elde edilir.

iii) $n \geq 0$ için, ispatın (ii) kısmındaki benzer işlemler yapılırsa

$$\mathcal{L}\left(\left(L_n^{(A,\lambda)}(t)\right)^2\right) = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty e^{-t\lambda}\, t^{A+nI}\left[D^n L_n^{(A,\lambda)}(t)\right] dt \tag{4.34}$$

şeklindedir. (4.12) den kolayca hesaplanabilir ki, $D^n L_n^{(A,\lambda)}(t) = (-1)^n \lambda^n I$ dir. Bu değer (4.34) de yazılırsa

$$\mathcal{L}\left(\left(L_n^{(A,\lambda)}(t)\right)^2\right) = \frac{\lambda^n}{n!}\int_0^\infty e^{-t\lambda}\, t^{A+nI}\, dt$$

bulunur. Öte yandan eşitliğin sağındaki integralin değeri (4.27) den $\lambda^{-(n+1)I-A}\,\Gamma(A+(n+1)I)$ olup yukarıda yerine yazılırsa

$$\mathcal{L}\left(\left(L_n^{(A,\lambda)}(t)\right)^2\right) = \frac{\lambda^{-A-I}}{n!}\Gamma(A+(n+1)I)$$

olarak elde edilir. $n \geq 0$ için $A+(n+1)I$ matrisinin tersi olduğundan $\Gamma(A+(n+1)I)$ matrisinin de tersi vardır (Hille 1969). Dolayısıyla, $\mathcal{L}\left(\left(L_n^{(A,\lambda)}(t)\right)^2\right)$ matrisi de regüler olup tersi vardır.

Böylece ispat tamamlanır. ■

4.2 Hermite Matris Polinomları

$A, B \in \mathbb{C}^{r\times r}$ olmak üzere, (1.1) ile verilen diferensiyel denklem sisteminden

$$Y''(x) - xAY'(x) + BY(x) = O \quad , \quad -\infty < x < \infty \tag{4.35}$$

formundaki matris diferensiyel denklemini gözönüne alalım. (4.35) sisteminin skaler durumdaki denklemleri vermesi için A ve C matrisleri aynı anda köşegenleştirilebilir olmalıdır.

$k \geq 0$ için C_k lar belirlenecek matrisler olmak üzere, (4.35) matris diferensiyel denkleminin

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, x^k \quad , \quad C_k \in \mathbb{C}^{r\times r} \tag{4.36}$$

formunda çözümünü araştıralım. Buradan x e göre türevler alınırsa

$$Y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, C_k\, x^{k-1} \quad , \quad Y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k\ (k-1)\ C_k x^{k-2}$$

bulunur. Bu tipteki çözümün denklemi sağlama koşulundan, kendisi ve x e göre türevleri denklemde yerlerine yazılırsa

$$\sum_{k=2}^{\infty} k\ (k-1)\ C_k\, x^{k-2} - A\sum_{k=0}^{\infty} k\, C_k\, x^k + B\sum_{k=0}^{\infty} C_k\, x^k = O$$

olup birinci toplamda k yerine $k+2$ alınır ve x^k nın kuvvetine göre düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\ (k+1)\ C_{k+2}\, x^k - A\sum_{k=0}^{\infty} k\, C_k\, x^k + B\sum_{k=0}^{\infty} C_k\, x^k &= O \\ \sum_{k=0}^{\infty} \{(k+2)\ (k+1)\ C_{k+2} + (B-kA)\ C_k\}\, x^k &= O \end{aligned}$$

elde edilir. Burada x^k nın katsayılarının sıfır matrisine eşitlenmesiyle C_k ların

$$(k+2)\ (k+1)\ C_{k+2} + (B-kA)\ C_k = O \quad , \quad k \geq 0 \tag{4.37}$$

eşitliğini sağlaması gerektiği görülür. Bu indirgeme bağıntısı

$$C_{k+2} = \frac{kA - B}{(k+1)\ (k+2)} C_k \quad , \quad k \geq 0 \tag{4.38}$$

şeklinde yazılabilir. (4.38) de k yerine sırasıyla $0, 1, 2, 3, ..., 2p-2, 2p-1, ...$ konulursa

$$
\begin{array}{lll}
k=0 & \Rightarrow & C_2=\frac{-B}{1.2}C_0 \\
k=1 & \Rightarrow & C_3=\frac{A-B}{2.3}C_1 \\
k=2 & \Rightarrow & C_4=\frac{2A-B}{3.4}C_2 \\
k=3 & \Rightarrow & C_5=\frac{3A-B}{4.5}C_3 \\
\vdots & & \\
k=2p-2 & \Rightarrow & C_{2p}=\frac{(2p-2)A-B}{(2p-1)(2p)}C_{2p-2} \\
k=2p-1 & \Rightarrow & C_{2p+1}=\frac{(2p-1)A-B}{(2p)(2p+1)}C_{2p-1} \\
\vdots & &
\end{array}
$$

elde edilir. C_2, C_4 de ve C_3, C_5 de yerlerine yazılırsa, sırasıyla

$$C_4=\frac{2A-B}{3.4}\frac{-B}{1.2}C_0 \quad \text{ve} \quad C_5=\frac{3A-B}{4.5}\frac{A-B}{2.3}C_1$$

olarak bulunur. Bu şekilde devam edilirse $p\geq 1$ olmak üzere, C_{2p} ve C_{2p+1} matrisleri sırasıyla

$$\left.\begin{array}{l}
C_{2p}=\dfrac{(2p-2)\,A-B}{(2p-1)\,(2p)}\cdots\dfrac{2A-B}{3.4}\dfrac{-B}{1.2}C_0 \\[3ex]
C_{2p+1}=\dfrac{(2p-1)\,A-B}{(2p)\,(2p+1)}\cdots\dfrac{3A-B}{4.5}\dfrac{A-B}{2.3}C_1
\end{array}\right\} \tag{4.39}$$

şeklinde C_0 ve C_1 keyfi matrisleri cinsinden bulunur. Diğer taraftan

$$B_r=(r-2)\,A-B \quad , \qquad r\geq 2$$

denirse

$$B_{2i}=(2i-2)\,A-B \;\; , \;\; B_{2i+1}=(2i-1)\,A-B \quad ; \quad 1\leq i\leq p$$

olacağından, bu gösterim (4.39) da kullanılırsa

$$C_{2p}=\frac{1}{(2p)!}\left(\prod_{i=p}^{1}B_{2i}\right)C_0 \quad , \qquad C_{2p+1}=\frac{1}{(2p+1)!}\left(\prod_{i=p}^{1}B_{2i+1}\right)C_1 \quad ; \quad p\geq 1$$

dir. Bu sonuçlar (4.36) da yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
Y\,(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}C_k\,x^k=C_0+\sum_{p=1}^{\infty}C_{2p}\,x^{2p}+C_1x+\sum_{p=1}^{\infty}C_{2p+1}\,x^{2p+1} \\
&= \left[I+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)!}\left(\prod_{i=p}^{1}B_{2i}\right)x^{2p}\right]C_0+\left[xI+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)!}\left(\prod_{i=p}^{1}B_{2i+1}\right)x^{2p+1}\right]C_1 \\
&= Y_1(x)C_0+Y_2(x)C_1
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. (4.37) eşitliğinden ve Lemma 2.8 den

$$(k+2)(k+1)\|C_{k+2}\| \leq (\|B\| + k\|A\|)\|C_k\|$$

olup

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|C_{k+2}\| |x|^{k+2}}{\|C_k\| |x|^k} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{(\|B\| + k\|A\|)}{(k+2)(k+1)} |x|^2 = 0$$

dır. Buradan görülmektedir ki, $Y_1(x)$ ve $Y_2(x)$ serisel çözümleri her reel x için yakınsaktır. Ayrıca

$$W(0) = \begin{bmatrix} Y_1(0) & Y_2(0) \\ Y_1'(0) & Y_2'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

sağlandığından $\{Y_1(x), Y_2(x)\}$ çiftine (4.35) denkleminin *temel çözümler cümlesi* denir.

(4.35) denkleminin matris polinom çözümlerinin varlığını garanti etmek için, (4.38) den de görülmektedir ki,

$$B = nA\ , \quad \text{negatif olmayan } n \text{ tamsayıları için} \tag{4.40}$$

koşulu yeterlidir. Bu durumda $C_{n+2} = O$ olur. Eğer $j = 0, 1, ...$ için

$$\begin{cases} n = 2j \Rightarrow Y_1(x),\ n. \text{ dereceden matris polinomu ve } Y_2(x) \text{ serisel çözüm} \\ n = 2j+1 \Rightarrow Y_1(x) \text{ serisel çözüm ve } Y_2(x),\ n.\text{dereceden matris polinomu} \end{cases}$$

dur. (4.40) koşulu altında (4.35) denklemi

$$Y''(x) - xAY'(x) + nAY(x) = O \quad , \quad -\infty < x < \infty \tag{4.41}$$

şeklini alır. Burada $r = 1$ ve $A = 2$ alınırsa, skaler durumdaki Hermite diferensiyel denklemi elde edilir.

I. Hermite Matris Polinomlarının İfadesi

Uyarı 4.1 *Bir matrisin karekökünü bulmak için Björck (1983), Cross and Lancaster (1974) ve Higham (1987) tarafından bazı metodlar verilmiştir. $r \times r$ boyutlu kompleks elemanlı bir matrisin karekökünün varlığı için sade bir gerek ve yeter şart, Cross and Lancaster (1974) tarafından verilmiştir.*

Burada ise pozitif kararlı bir $C \in \mathbb{C}^{r\times r}$ matrisinin karekökünün varlığı dikkate alınacaktır. c bir reel sayı olmak üzere ve böyle bir C matrisi için fonksiyonel matris hesabından

$$C^c = \exp\left[c \log C\right]$$

dir. Burada $\log C$, C *matrisinin logaritmaya uygulamasının anadalını göstermektedir. Ayrıca*

$$C^{\frac{1}{2}} = \sqrt{C}$$

ile gösterilecektir.

$A \in \mathbb{C}^{r\times r}$ pozitif kararlı bir matris olmak üzere, x ve t nin kompleks değerlerinin

$$G(x,t) = \exp\left(xt\sqrt{2A} - t^2 I\right) \tag{4.42}$$

matris değerli fonksiyonunu dikkate alalım. $G(x,t)$, t kompleks değişkeninin fonksiyonu olarak dikkate alınırsa, analitik bir matris fonksiyonudur. Bu nedenle $t = 0$ noktasında

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,A)\frac{t^n}{n!} \quad , \quad |t| < \infty \tag{4.43}$$

şeklinde bir Taylor serisine sahiptir. Bu durumda Lemma 2.18 den de yararlanarak (4.42) den

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \exp\left(xt\sqrt{2A}\right)\exp\left(-t^2 I\right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{2A}\right)^n x^n \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{k!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k\left(x\sqrt{2A}\right)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!}t^n \end{aligned} \tag{4.44}$$

yazılabilir. (4.43) ve (4.44) den t^n lerin katsayılarının eşitlenmesiyle, n. dereceden singüler olmayan $\left(\sqrt{2A}\right)^n$ başkatsayılı $H_n(x,A)$ Hermite matris polinomlarının ifadesi

$$H_n(x,A) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k n!\left(x\sqrt{2A}\right)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!} \tag{4.45}$$

şeklinde elde edilir (Jódar and Company 1996).

(4.45) den,

$$H_n(-x,A) = (-1)^n H_n(x,A)$$

ve

$$H_0(x,A) = I \quad , \quad H_{2n}(0,A) = \frac{(-1)^n (2n)!}{n!} I \quad , \quad H_{2n+1}(0,A) = O$$

olduğu görülmektedir. (4.42) ve (4.45) de $r = 1$ ve $A = 2$ alınırsa, sırasıyla skaler durumdaki Hermite polinomları için doğurucu fonksiyon ve Hermite polinomlarının açık ifadesi elde edilir.

II. Hermite Matris Polinomları İçin Üç Terimli Matris Reküerans Bağıntısı

(4.42) den de görüldüğü gibi $G(x,t)$, x değişkeninin analitik bir fonksiyonudur ve x e göre diferensiyelenebilirdir. Bu nedenle

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x,t)}{\partial x} &= t\sqrt{2A}\exp\left(xt\sqrt{2A} - t^2 I\right) \\ &= t\sqrt{2A}G(x,t) \end{aligned} \tag{4.46}$$

yazılabilir. (4.43) eşitliğinde de x e göre türev alınırsa

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n'(x,A)\frac{t^n}{n!}$$

şeklinde olacaktır. Bu değeri ve (4.43) deki G yi (4.46) da yerlerine yazarsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n'(x,A)\frac{t^n}{n!} = \sqrt{2A}\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,A)\frac{t^{n+1}}{n!}$$

bulunur. Eşitliğin sağındaki ifadede n yerine $n-1$ alır ve t^n lerin katsayıları eşitlenirse

$$H_0'(x,A) = O \quad , \quad H_n'(x,A) = n\sqrt{2A}H_{n-1}(x,A) \quad ; \quad n \geq 1 \tag{4.47}$$

elde edilir. (4.42) ve (4.43) de t ye göre türev alınırsa sırasıyla

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x,t)}{\partial t} &= \left(x\sqrt{2A} - 2tI\right)G(x,t) \qquad (4.48) \\ \frac{\partial G(x,t)}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x,A)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

elde edilecektir. Bu ifadelerin sol yanları birbirine eşit olduğundan, sağ yanlarının da birbirine eşitlenmesiyle, (4.43) ü de kullanarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n(x,A)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = x\sqrt{2A}\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,A)\frac{t^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,A)\frac{t^{n+1}}{n!}$$

elde edilir. Eşitliğin solunda n yerine $n+1$ ve sağındaki ikinci toplamda n yerine $n-1$ alınır ve de t nin kuvvetlerinin aynı dereceli olanlarının katsayıları eşitlenirse

$$\begin{aligned} H_1(x,A) &= x\sqrt{2A}H_0(x,A) \\ H_{n+1}(x,A) &= x\sqrt{2A}H_n(x,A) - 2nH_{n-1}(x,A) \quad , \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

elde edilir. $H_0(x,A) = I$ olduğundan

$$H_1(x,A) = x\sqrt{2A}$$

ve üç terimli matris rekürans bağıntısı ise

$$H_{n+1}(x,A) - x\sqrt{2A}H_n(x,A) + 2nH_{n-1}(x,A) = 0 \quad , \quad n \geq 1 \tag{4.49}$$

şeklinde bulunur (Jódar and Company 1996). Burada $r = 1$ ve $A = 2$ alındığında, skaler durumdaki Hermite polinomları için üç terimli rekürans bağıntısı elde edilir.

III. Hermite Matris Diferensiyel Denklemi

(4.46) ve (4.48) eşitlikleri sırasıyla $x\sqrt{2A} - 2tI$ ve $t\sqrt{2A}$ ile çarpıldığında, elde edilen eşitliklerin sağ yanları birbirine eşit olacağından buradan

$$\left(x\sqrt{2A} - 2tI\right)\frac{\partial G(x,t)}{\partial x} = t\sqrt{2A}\,\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}$$

denklemi elde edilir. $G(x,t)$ nin bu denklemi sağlama koşulundan, serisel ifadesinde x ve t ye göre türevleri alınır ve elde edilen son eşitlikte yerlerine yazılırsa

$$x\sqrt{2A}\sum_{n=0}^{\infty} H_n'(x,A)\frac{t^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{\infty} H_n'(x,A)\frac{t^{n+1}}{n!} = \sqrt{2A}\sum_{n=1}^{\infty} H_n(x,A)\frac{t^n}{(n-1)!}$$

bulunur. Gerekli indis kaydırmalar yapılıp t^n lerin katsayıları eşitlenirse

$$x\sqrt{2A}H_n'(x,A) - 2nH_{n-1}'(x,A) = n\sqrt{2A}H_n(x,A) \quad , \quad n \geq 1 \tag{4.50}$$

bağıntısı elde edilir. (4.47) eşitliğinin her iki yanının türevi alınırsa

$$H_n''(x,A) = n\sqrt{2A}H_{n-1}'(x,A)$$

bulunur. Bu sonucu da dikkate alarak, (4.50) eşitliğinin her iki yanı $-\dfrac{\sqrt{2A}}{2}$ ile çarpılır ve düzenlenirse

$$H_n''(x,A) - AxH_n'(x,A) + nAH_n(x,A) = 0 \quad , \quad n \geq 0 \tag{4.51}$$

elde edilir ki, bu bize, n. dereceden $H_n(x,A)$ Hermite matris polinomunun

$$Y''(x) - xAY'(x) + nAY(x) = 0 \quad , \qquad -\infty < x < \infty$$

şeklindeki matris diferensiyel denkleminin bir çözümü olduğunu gösterir (Jódar and Company 1996).

IV. Hermite Matris Polinomları İçin Rodrigues Formülü

(4.42) ve (4.43) den

$$H_n(x,A) = \left[\frac{d^n}{dt^n}\exp\left(xt\sqrt{2A} - t^2 I\right)\right]_{t=0} \tag{4.52}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$xt\sqrt{2A} - t^2 I = -\left(x\sqrt{\frac{A}{2}} - tI\right)^2 + \frac{A}{2}x^2 = -\frac{A}{2}\left(xI - \left(\frac{A}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} t\right)^2 + \frac{A}{2}x^2$$

olduğundan, bu ayrışım (4.52) de kullanılırsa

$$\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right) H_n(x,A) = \left[\frac{d^n}{dt^n}\exp\left\{-\frac{A}{2}\left(xI - \left(\frac{A}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} t\right)^2\right\}\right]_{t=0}$$

elde edilir. Bu ifade

$$\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right) H_n(x,A) = (-1)^n \left(\frac{A}{2}\right)^{-\frac{n}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)$$

şeklinde de yazılabileceğinden Hermite matris polinomları için Rodrigues formülü

$$H_n(x,A) = (-1)^n \left(\frac{A}{2}\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{A}{2}x^2\right) \frac{d^n}{dx^n}\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right) \tag{4.53}$$

şeklinde elde edilir (Jódar and Company 1996). Burada $r = 1$ ve $A = 2$ alınırsa, skaler durumdaki Hermite polinomları için Rodrigues formülü elde edilir.

V. Hermite Matris Polinomlarının Ortogonalliği

İlk olarak, ortogonalliğin ispatında kullanılacak bir teoremi verelim.

Teorem 4.3 *$A \in \mathbb{C}^{r\times r}$ pozitif kararlı bir matris ve n negatif olmayan bir tamsayı olsun. $P(x)$ bir matris polinomu olmak üzere,*

i) $\lim\limits_{t\to\pm\infty} P(x)\ e^{-\frac{A\ x^2}{2}} = O,$

ii) $\int\limits_0^\infty e^{-\frac{Ax^2}{2}} x^{2n}\, dx = 2^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} A^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\, \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$

sağlanırlar (Jódar and Company 1996).

İspat. i) D, $\dfrac{A}{2}$ nin özdeğerlerini esas köşegeni üzerinde bulunduran köşegen bir matris ve N tam üst üçgensel bir matris olmak üzere $\dfrac{A}{2}$ matrisinin Schur ayrışımı $Q^H\dfrac{A}{2}Q = D + N$ olsun.

$$a\left(-\frac{A}{2}\right) = \max\left\{-\frac{\operatorname{Re}(z)}{2} : z \in \sigma(A)\right\} \tag{4.54}$$

$$M_s\left(x^2\right) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\left\|Nx^2\right\|^k}{k!} \tag{4.55}$$

olmak üzere

$$\left\|e^{-\frac{Ax^2}{2}}\right\| \leq e^{x^2 a\left(-\frac{A}{2}\right)} M_s\left(x^2\right)$$

dir (Golub and Van Loan 1983). Hipotezden dolayı, $a\left(-\dfrac{A}{2}\right) < 0$ olup (4.54) ve (4.55) gözönüne alınırsa ispat tamamlanır.

ii) $\operatorname{Re}(\upsilon) > 0$ ve $\operatorname{Re}(\mu) > 0$ olmak üzere

$$\int_0^\infty x^{\upsilon-1} e^{-\mu x^2} dx$$

integralinde $\mu x^2 = t$ dönüşümü yapılırsa $2\mu x dx = dt$ ve $x = \sqrt{\frac{t}{\mu}}$ olup

$$\int_0^\infty x^{\upsilon-1} e^{-\mu x^2}\, dx = \frac{1}{2}\mu^{-\frac{\upsilon}{2}} \int_0^\infty t^{\frac{\upsilon}{2}-1} e^{-t}\, dt = \frac{1}{2}\mu^{-\frac{\upsilon}{2}}\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right) \tag{4.56}$$

bulunur. Burada $\mu^{-\frac{\upsilon}{2}} = \exp\left[-\frac{\upsilon}{2}\ln\mu\right]$ dir. (4.56) eşitliğinde $\upsilon = 2n+1$ ve μ yerine de $\dfrac{\mu}{2}$ alınırsa

$$g(\mu) = \int_0^\infty x^{2n} e^{-\frac{\mu x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{2}\right)^{-n-\frac{1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad \operatorname{Re}(\mu) > 0$$

yazılabilir. Bu son eşitlikte fonksiyonel matris hesabını kullanarak μ yerine A matrisi alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{2n} e^{-\frac{Ax^2}{2}}\, dx &= \frac{1}{2}\left(\frac{A}{2}\right)^{-n-\frac{1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \\
&= 2^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} A^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.4 *$A \in \mathbb{C}^{r\times r}$ pozitif kararlı bir matrisi için*

$$W(x) = \exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)$$

olmak üzere

$$\mathcal{L}(x^n I) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n W(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right) dx$$

şeklinde verilsin. $H_n(x,A)$ Hermite matris polinomlarının $\{H_n(x,A)\}_{n\geq 0}$ dizisi, negatif olmayan tüm n ve s tamsayıları için

i. *$H_n(x,A)$, singüler olmayan başkatsayılı n. dereceden bir matris polinomudur,*

ii. *$n \neq s$ için $\mathcal{L}(H_n(x,A)\, H_s(x,A)) = O$ dır,*

iii. *$n \geq 0$ için $\mathcal{L}(H_n^2(x,A))$ nin tersi vardır*

koşullarını sağladığından, $\mathcal{L}$ matris moment fonksiyoneline göre matris ortogonal polinom dizisi*dir (Jódar and Company 1996).*

İspat. i) $H_n(x,A)$ Hermite matris polinomunun n. dereceden singüler olmayan $\left(\sqrt{2A}\right)^n$ başkatsayılı olduğu (4.45) den görülmektedir.

ii) (4.51) denklemi

$$\frac{d}{dx}\left[\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right) H_n'(x,A)\right] + nA\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right) H_n(x,A) = O \tag{4.57}$$

şeklinde yazılabilir. Burada n yerine s alınırsa

$$\frac{d}{dx}\left[\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right) H_s'(x,A)\right] + sA\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right) H_s(x,A) = O \tag{4.58}$$

elde edilir. (4.57) eşitliği $H_s(x,A)$ ve (4.58) ise $H_n(x,A)$ ile çarpılır, elde edilen ifadeler taraf tarafa çıkarılırsa

$$(n-s)\, A\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right) H_n(x,A)\, H_s(x,A)$$

$$= H_n(x,A)\frac{d}{dx}\left[\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right) H_s'(x,A)\right] - H_s(x,A)\frac{d}{dx}\left[\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right) H_n'(x,A)\right]$$

bulunur. Eşitliğin sağına $\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right) H_n'(x,A)\, H_s'(x,A)$ terimini ekleyip çıkarır ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$(n-s)\,A\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)H_n\,(x,A)\,H_s\,(x,A)$$

$$=\frac{d}{dx}\left[\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)\{H_n\,(x,A)\,H_s'\,(x,A)-H_n'\,(x,A)\,H_s\,(x,A)\}\right]$$

eşitliğini buluruz. Bu ifadenin her iki yanı $[a,b]$ aralığında integre edildiğinde

$$(n-s)\,A\int_a^b\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)H_n\,(x,A)\,H_s\,(x,A)\,dx$$

$$=\left[\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)\{H_n\,(x,A)\,H_s'\,(x,A)-H_n'\,(x,A)\,H_s\,(x,A)\}\right]_a^b$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte $a\to-\infty$ ve $b\to\infty$ için limite geçilirse, Teorem 4.3.i den

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)H_n\,(x,A)\,H_s\,(x,A)\,dx=O\quad,\quad n\neq s\tag{4.59}$$

olup

$$\mathcal{L}\,(H_n\,(x,A)\,H_s\,(x,A))=O\quad,\quad n\neq s$$

dir.

iii) (4.49) eşitliğinde ilk olarak n yerine $n-1$ alınır ve sonra eşitliğin her iki yanı $H_n\,(x,A)$ ile çarpılırsa

$$H_n^2\,(x,A)-x\sqrt{2A}H_n\,(x,A)\,H_{n-1}\,(x,A)+2\,(n-1)\,H_n\,(x,A)\,H_{n-2}\,(x,A)=O\tag{4.60}$$

bulunur. Ayrıca (4.49) eşitliğinin her iki yanı $H_{n-1}\,(x,A)$ ile çarpılırsa

$$H_{n+1}\,(x,A)\,H_{n-1}\,(x,A)-x\sqrt{2A}H_n\,(x,A)\,H_{n-1}\,(x,A)+2nH_{n-1}^2\,(x,A)=O\tag{4.61}$$

bulunur. (4.60) ve (4.61) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa, $n\geq 2$ için

$$H_n^2\,(x,A)+2\,(n-1)\,H_n\,(x,A)\,H_{n-2}\,(x,A)-H_{n+1}\,(x,A)\,H_{n-1}\,(x,A)-2nH_{n-1}^2\,(x,A)=O\tag{4.62}$$

elde edilir. (4.62) eşitliğininin her iki yanı $W\,(x)=\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)$ ile çarpılır $(-\infty,\infty)$ aralığında integre edilirse, (4.59) eşitliğini de gözönüne alarak

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_n^2\,(x,A)\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)dx=2n\int_{-\infty}^{\infty}H_{n-1}^2\,(x,A)\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)dx\ ,\ \ n\geq 2\tag{4.63}$$

bulunur. Diğer taraftan $H_1(x,A) = x\sqrt{2A}$ olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_1^2(x,A)\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} 2Ax^2\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)dx = 4A\int_{0}^{\infty} x^2\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)dx \tag{4.64}$$

dir. Teorem 4.3.ii de $n = 1$ alınarak elde edilen sonucu (4.64) eşitliğinde kullanırsak

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} H_1^2(x,A)\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)dx &= 4A2^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\\ &= 2\left(2\pi A^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{4.65}$$

olarak bulunur. $H_0(x,A) = I$ olduğundan ve Teorem 4.3.ii den

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} H_0^2(x,A)\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{Ax^2}{2}}\,dx\\ &= 22^{-\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2\pi A^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{4.66}$$

yazılabilir. (4.63) eşitliği

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x,A)\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)dx\\ &= 2n\int_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}^2(x,A)\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)dx\\ &= (2n)\left[2(n-1)\right]\int_{-\infty}^{\infty} H_{n-2}^2(x,A)\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)dx\\ &= (2n)\left[2(n-1)\right]\left[2(n-2)\right]\int_{-\infty}^{\infty} H_{n-3}^2(x,A)\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)dx\\ &\;\;\vdots\\ &= (2n)\left[2(n-1)\right]\left[2(n-2)\right]\ldots\left[2.2\right]\int_{-\infty}^{\infty} H_1^2(x,A)\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)dx\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (4.65) eşitliği burada kullanılırsa

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x,A)\exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)dx &= (2n)\left[2(n-1)\right]\left[2(n-2)\right]\ldots\left[2.2\right]2\left(2\pi A^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 2^n n!\left(2\pi A^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\ ,\quad n \geq 2\end{aligned} \tag{4.67}$$

olarak bulunur. (4.67) eşitliğinde $n = 0$ ve $n = 1$ alınırsa, sırasıyla (4.65) ve (4.66) elde edilir. Bu durumda

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2 (x, A) \exp \left(-\frac{A}{2} x^2 \right) dx = 2^n n! \left(2\pi A^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad n \geq 0$$

yazılabilir. Buradan

$$\mathcal{L} \left(H_n^2 (x, A) \right) = 2^n n! \left(2\pi A^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad n \geq 0$$

olup, $n \geq 0$ için $A^{-\frac{1}{2}}$ matrisinin tersi olduğundan $\mathcal{L} \left(H_n^2 (x, A) \right)$ matrisinin de tersi vardır. Böylece ispat tamamlanır. ■

4.3 Laguerre ve Hermite Matris Polinomlarının Bağlantısı

Lemma 4.1 *$A \in \mathbb{C}^{r \times r}$,*

$$\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2} \quad , \quad \forall z \in \sigma (A) \tag{4.68}$$

koşulunu sağlayan bir matris ise, bu durumda $x > 0$ için

$$\frac{x^{-A} e^{\frac{Ax}{2}}}{n!} D^n \left[e^{-\frac{Ax}{2}} x^{A+nI} \right]$$
$$= \frac{(-1)^n}{(2n)! \sqrt{\pi}} \Gamma \left(A + (n+1) I \right) \Gamma^{-1} \left(A + \frac{1}{2} I \right) \int_{-1}^{1} \left(1 - t^2 \right)^{\left(A - \frac{1}{2} I \right)} H_{2n} \left(t\sqrt{x}, A \right) \, dt \tag{4.69}$$

dir (Jódar and Defez 1998).

İspat. (4.45) ifadesinde n yerine $2n$ ve x yerine de $t\sqrt{x}$ alındığında

$$H_{2n} \left(t\sqrt{x}, A \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2n)! \, (2Ax)^{n-k} \, t^{2n-2k}}{k! \, (2n-2k)!}$$

olup, bu son eşitlikte k yerine $n - k$ alınırsa

$$H_{2n} \left(t\sqrt{x}, A \right) = (2n)! \, (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \, 2^k A^k x^k t^{2k}}{(2k)! \, (n-k)!}$$

elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^{\left(A-\frac{1}{2}I\right)} H_{2n}\left(t\sqrt{x}, A\right)\ dt \\
&\qquad = \int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right) 2^{\left(A-\frac{1}{2}I\right)} (2n)!\,(-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, 2^k A^k x^k t^{2k}}{(2k)!\,(n-k)!}\right) dt \\
&\qquad = (2n)!\,(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{(-1)^k\, 2^k A^k x^k}{(2k)!\,(n-k)!} \int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^{\left(A-\frac{1}{2}I\right)} t^{2k} dt\right] \qquad (4.70)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Eşitliğin sağındaki integralde $t^2 = u$ dönüşümü yapılırsa Tanım 3.2, Lemma 3.2 ve Lemma 3.5 den

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^{\left(A-\frac{1}{2}I\right)} t^{2k} dt &= 2\int_{0}^{1} (1-u)^{\left(A-\frac{1}{2}I\right)} u^k \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{2} du \\
&= \int_{0}^{1} (1-u)^{\left(A+\frac{1}{2}I\right)-I} u^{\left(k+\frac{1}{2}\right)I-I} du \\
&= \mathbf{B}\left(A+\frac{1}{2}I, \left(k+\frac{1}{2}\right)I\right) \\
&= \Gamma\left(A+\frac{1}{2}I\right)\Gamma\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)I\right)\Gamma^{-1}\left(A+(k+1)\,I\right)
\end{aligned} \qquad (4.71)
$$

olarak bulunur. Gamma matris fonksiyonunun

$$
\Gamma\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)I\right) = I\ \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)
$$

özelliğinden ve Gamma fonksiyonu için

$$
\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\sqrt{\pi}
$$

olduğundan

$$
\Gamma\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)I\right) = \frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{2^{2k}k!} I \qquad (4.72)
$$

yazılabilir. (4.71) ve (4.72) eşitliklerinden

$$
\int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^{\left(A-\frac{1}{2}I\right)} t^{2k} dt = \Gamma\left(A+\frac{1}{2}I\right)\Gamma^{-1}\left(A+(k+1)\,I\right)\frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{2^{2k}k!} \qquad (4.73)
$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned}(-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k A^k &= e^{\frac{Ax}{2}} D^k \left(e^{-\frac{Ax}{2}}\right) \\ x^{-A} D^{n-k}\left(x^{A+nI}\right) &= x^k \Gamma\left(A+(n+1)I\right)\Gamma^{-1}\left(A+(k+1)I\right)\end{aligned}$$

eşitliklerini gözönünde bulundurarak, (4.69) in sağ yanında (4.70) ve (4.73) değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^n}{(2n)!\sqrt{\pi}}\Gamma\left(A+(n+1)I\right)\Gamma^{-1}\left(A+\tfrac{1}{2}I\right)\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{\left(A-\frac{1}{2}I\right)} H_{2n}\left(t\sqrt{x},A\right)\,dt \\ &= \frac{(-1)^n}{(2n)!\sqrt{\pi}}\Gamma\left(A+(n+1)I\right)\Gamma^{-1}\left(A+\frac{1}{2}I\right)(2n)!\,(-1)^n \\ &\quad\times\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(-1)^k 2^k A^k x^k}{(2k)!\,(n-k)!}\Gamma\left(A+\frac{1}{2}I\right)\Gamma^{-1}\left(A+(k+1)I\right)\frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{2^{2k}k!}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^k A^k x^k}{k!\,(n-k)!}\Gamma\left(A+(n+1)I\right)\Gamma^{-1}\left(A+(k+1)I\right)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{e^{\frac{Ax}{2}}}{k!\,(n-k)!}D^k\left(e^{-\frac{Ax}{2}}\right)x^{-A}D^{n-k}\left(x^{A+nI}\right)\right] \\ &= \frac{x^{-A}e^{\frac{Ax}{2}}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^k\left(e^{-\frac{Ax}{2}}\right)D^{n-k}\left(x^{A+nI}\right) \qquad (4.74)\end{aligned}$$

elde edilir. Bir çarpımın n. türevi için Leibnitz kuralı gereğince

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^k\left(e^{-\frac{Ax}{2}}\right)D^{n-k}\left(x^{A+nI}\right) = D^n\left(e^{-\frac{Ax}{2}}x^{A+nI}\right)$$

yazılabilir. Bu sonuç (4.74) de yerine yazılırsa, (4.69) eşitliği bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Lemma 4.2 *A matrisi* (4.3) *koşulunu sağlayan bir matris ve* λ, $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ *olacak şekilde bir kompleks sayı olmak üzere,* $x > 0$ *için*

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\left(\lambda I-\frac{1}{2}A\right)^k L_{n-k}^{(A+kI,\lambda)}(x) = \frac{x^{-A}e^{\frac{Ax}{2}}}{n!}D^n\left[e^{-\frac{Ax}{2}}x^{A+nI}\right] \qquad (4.75)$$

eşitliği geçerlidir (Jódar and Defez 1998).

İspat.

$$e^{-\frac{Ax}{2}}x^{A+nI} = e^{\left(-\frac{A}{2}+\lambda I\right)x}e^{-\lambda x}x^{A+nI} \qquad (4.76)$$

$$\frac{x^{-A}\,e^{\frac{Ax}{2}}}{n!} = \frac{1}{n!}e^{\left(\frac{A}{2}-\lambda I\right)x}e^{\lambda x}x^{-A} \qquad (4.77)$$

şeklinde yazılabilen (4.76) ve (4.77) ifadeleri, (4.75) eşitliğinin sağ tarafında yerlerine yazılırsa

$$\frac{x^{-A}\,e^{\frac{Ax}{2}}}{n!}D^n\left[e^{-\frac{Ax}{2}}x^{A+nI}\right]=\frac{1}{n!}e^{\left(\frac{A}{2}-\lambda I\right)x}e^{\lambda x}x^{-A}D^n\left[e^{\left(\lambda I-\frac{A}{2}\right)x}e^{-\lambda x}x^{A+nI}\right] \qquad (4.78)$$

olarak bulunur. Çarpımın n. türevi için Leibnitz kuralı gereğince

$$D^n\left[\left\{e^{\left(\lambda I-\frac{A}{2}\right)x}\right\}\left\{e^{-\lambda x}x^{A+nI}\right\}\right]=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^k\left[e^{\left(\lambda I-\frac{A}{2}\right)x}\right]D^{n-k}\left[e^{-\lambda x}x^{A+nI}\right] \quad (4.79)$$

şeklinde olacaktır. (4.24) de n yerine $n-k$, A yerine $A+kI$ ve t yerine de x alınırsa

$$L_{n-k}^{(A+kI,\lambda)}(x)=\frac{x^{-A-kI}\,e^{\lambda x}}{(n-k)!}D^{n-k}\left[e^{-\lambda x}\,x^{A+nI}\right]$$

olup buradan

$$D^{n-k}\left[e^{-\lambda x}\,x^{A+nI}\right]=(n-k)!x^{A+kI}\,e^{-\lambda x}L_{n-k}^{(A+kI,\lambda)}(x) \qquad (4.80)$$

dir. Ayrıca

$$D^k\left[e^{\left(\lambda I-\frac{A}{2}\right)x}\right]=\left(\lambda I-\frac{A}{2}\right)^k e^{\left(\lambda I-\frac{A}{2}\right)x} \qquad (4.81)$$

dir. (4.79) – (4.81) eşitlikleri (4.78) de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{x^{-A}\,e^{\frac{Ax}{2}}}{n!}D^n\left[e^{-\frac{Ax}{2}}x^{A+nI}\right]\\
&=\frac{1}{n!}e^{\left(\frac{A}{2}-\lambda I\right)x}e^{\lambda x}x^{-A}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\lambda I-\frac{A}{2}\right)^k e^{\left(\lambda I-\frac{A}{2}\right)x}(n-k)!x^{A+kI}\,e^{-\lambda x}L_{n-k}^{(A+kI,\lambda)}(x)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\left(\lambda I-\frac{A}{2}\right)^k L_{n-k}^{(A+kI,\lambda)}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Bu iki lemmanın sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.5 *A matrisi* (4.68) *koşulunu sağlayan bir matris ise, bu durumda*

$$\frac{(-1)^n}{(2n)!\sqrt{\pi}}\Gamma\left(A+(n+1)I\right)\Gamma^{-1}\left(A+\frac{1}{2}I\right)\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{\left(A-\frac{1}{2}I\right)}H_{2n}\left(t\sqrt{x},A\right)\,dt$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\left(\lambda I-\frac{A}{2}\right)^k L_{n-k}^{(A+kI,\lambda)}(x)\quad ;\quad n\geq 0\ ,\quad x>0 \qquad (4.82)$$

dır (Jódar and Defez 1998).

Uyarı 4.2 *A, (4.3) koşulunu sağlayan bir matris ve* λ, $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ *olacak şekilde bir kompleks sayı olmak üzere*

$$\frac{d}{dt}L_n^{(A,\lambda)}(x) = DL_n^{(A,\lambda)}(x) = -\lambda L_{n-1}^{(A+I,\lambda)}(x) \quad , \quad n \geq 1$$

dir. Bu eşitliğin her iki yanının x e göre türevini alırsak

$$D^2 L_n^{(A,\lambda)}(x) = -\lambda D L_{n-1}^{(A+I,\lambda)}(x) = (-\lambda)^2 L_{n-2}^{(A+2I,\lambda)}(x)$$

olarak elde edilir. Bu işlem $k-2$ *defa daha tekrar edilirse*

$$D^k L_n^{(A,\lambda)}(x) = (-\lambda)^k L_{n-k}^{(A+kI,\lambda)}(x) \quad \Rightarrow \quad L_{n-k}^{(A+kI,\lambda)}(x) = \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^k D^k L_n^{(A,\lambda)}(x)$$

bulunur. Bu sonuç (4.82) de kullanılırsa

$$\frac{(-1)^n}{(2n)!\sqrt{\pi}}\Gamma(A+(n+1)I)\Gamma^{-1}\left(A+\frac{1}{2}I\right)\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\left(A-\frac{1}{2}I\right)}H_{2n}(t\sqrt{x},A)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\left(\frac{A}{2\lambda}-I\right)^k D^k L_n^{(A,\lambda)}(x) \quad ; \quad \mathrm{Re}(\lambda) > 0 \ , \ n \geq 0 \ , \ x > 0$$

şeklinde de yazılabilir.

4.4 Jacobi Matris Polinomları

Tanım 4.1 $A, B \in \mathbb{C}^{r\times r}$ *matrisleri*

$$\forall z \in \sigma(A) \ \text{için} \ \mathrm{Re}(z) > -1 \quad \text{ve} \quad \forall z \in \sigma(B) \ \text{için} \ \mathrm{Re}(z) > -1 \tag{4.83}$$

spektral koşulunu sağlamak üzere, $n \geq 0$ *doğal sayısı için n. dereceden* $P_n^{(A,B)}(x)$ *Jacobi matris polinomu*

$$\begin{aligned} P_n^{(A,B)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\Bigg[\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n+k}}{2^k n!}\Gamma(A+B+(n+k+1)I)\Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I) \\ &\quad \times \Gamma(B+(n+1)I)\Gamma^{-1}(B+(k+1)I)(1+x)^k\Bigg] \end{aligned} \tag{4.84}$$

şeklinde tanımlanır (Defez et al. 2004).

Lemma 4.3 $P \in \mathbb{C}^{r\times r}$ *olmak üzere,* $\forall z \in \sigma(P)$ *için* $\mathrm{Re}(z) > -1$ *ise,* $n \geq 0$ *doğal sayısı ve* $\forall w \in \sigma(P+nI)$ *için* $\mathrm{Re}(w) > n-1$ *dir.*

İspat. $\sigma(P)$, λ ya göre r. dereceden bir denklem olan $|P-\lambda I|=0$ şeklindeki P matrisinin karakteristik denkleminin λ köklerinden oluşan bir kümedir ve bu durumda $\mathrm{Re}(\lambda)>-1$ dir. $P+nI$ matrisinin özdeğerleri $|(P+nI)-\mu I|=0$ denkleminin μ kökleridir. Diğer taraftan $|(P+nI)-\mu I|=|P-(\mu-n)I|=0$ olup buradan $\lambda=\mu-n$ elde edilir. n bir doğal sayı ve $\mathrm{Re}(\lambda)>-1$ olduğundan $\mathrm{Re}(\lambda)=\mathrm{Re}(\mu-n)>-1$ olup buradan $\mathrm{Re}(\mu)>n-1$ dir. O halde $\sigma(P+nI)$, $P+nI$ matrisinin μ özdeğerlerinden oluşan küme olmak üzere, $\forall w\in\sigma(P+nI)$ için $\mathrm{Re}(w)>n-1$ dir. ■

Sonuç 4.1 *$P\in\mathbb{C}^{r\times r}$ olmak üzere, $\forall z\in\sigma(P)$ için $\mathrm{Re}(z)>-1$ ise, $n>0$ tamsayısı için $P+nI$ matrisi pozitif kararlıdır.*

İspat. Lemma 4.3 de $n>0$ olmak üzere, $\forall w\in\sigma(P+I)$ için $\mathrm{Re}(w)>n-1>0$ olduğundan ve pozitif kararlılık tanımından $P+nI$ matrisi pozitif kararlıdır. ■

Sonuç 4.2 (3.5) *ve Sonuç* 4.1 *den yararlanarak pozitif kararlı $B+I$ matrisi için*

$$(B+I)_k=\Gamma(B+I+kI)\,\Gamma^{-1}(B+I)\quad,\quad k\geq 0$$

olup buradan

$$\Gamma^{-1}(B+(k+1)I)=(B+I)_k^{-1}\,\Gamma^{-1}(B+I)\quad,\quad k\geq 0 \tag{4.85}$$

yazılabilir. (4.84) *ve* (4.85) *den yararlanarak*

$$\begin{aligned}
P_n^{(A,B)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\Bigg[\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{(-1)^{n+k}}{n!}(A+B+(n+k)I)(A+B+(n+k-1)I)\\
&\quad \times...(A+B+(n+1)I)\Gamma(A+B+(n+1)I)\Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I)\\
&\quad \times\Gamma(B+(n+1)I)(B+I)_k^{-1}\,\Gamma^{-1}(B+I)\frac{(1+x)^k}{2^k}\Bigg]\\
&= \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\Bigg[\frac{(n-k+1)...(n-1)n(-1)^k}{k!}(A+B+(n+1)I)_k\\
&\quad \times(B+I)_k^{-1}\Gamma(B+(n+1)I)\Gamma^{-1}(B+I)\left(\frac{1+x}{2}\right)^k\Bigg]\\
&= \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\Bigg[\frac{(-n+k-1)...(-n+1)(-n)}{k!}(A+B+(n+1)I)_k\\
&\quad \times(B+I)_k^{-1}\left(\frac{1+x}{2}\right)^k\Bigg]\Gamma^{-1}(B+I)\Gamma(B+(n+1)I)
\end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{(-nI)_k \left(A + B + (n+1)I\right)_k (B+I)_k^{-1}}{k!} \left(\frac{1+x}{2}\right)^k \right]$$
$$\times \Gamma^{-1}(B+I)\,\Gamma\left(B + (n+1)I\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} F\left(A + B + (n+1)I, -nI; B+I; \frac{1+x}{2}\right)$$
$$\times \Gamma^{-1}(B+I)\,\Gamma\left(B + (n+1)I\right)$$

yazılabilir. Buradan da, Jacobi matris polinomlarının

$$P_n^{(A,B)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} F\left(A + B + (n+1)I, -nI; B+I; \frac{1+x}{2}\right)(B+I)_n \tag{4.86}$$

şeklinde hipergeometrik matris fonksiyonu yardımıyla bir gösterimi elde edilir.

I. Jacobi Matris Diferensiyel Denklemi

Teorem 4.6 *$\forall n \geq 0$ doğal sayısı için, $P_n^{(A,B)}(x)$ Jacobi matris polinomu*

$$(1-x^2)\,Y''(x) + 2Y'(x)\,B$$
$$-\left(A + B + x\left(A + B + 2I\right)\right)Y'(x) + n\left(A + B + (n+1)I\right)Y(x) = O \tag{4.87}$$

matris diferensiyel denklemini sağlar (Defez et al. 2004).

İspat. Sonuç 3.1 den de görülmektedir ki; $A^*, B^*, C^* \in \mathbb{C}^{r\times r}$ matrisleri için $B^*C^* = C^*B^*$ ve

$$\forall n \geq 0 \text{ tamsayısı için } C^* + nI \text{ regüler matris}$$

koşulları sağlanmak üzere

$$F(A^*, B^*; C^*; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^*)_n (B^*)_n (C^*)_n^{-1}}{n!} z^n$$

hipergeometrik matris fonksiyonu, $0 < |z| < 1$ için

$$z(1-z)\,W''(z) - zA^*W'(z) + W'(z)\left(C^* - z(B^* + I)\right) - A^*W(z)\,B^* = O \tag{4.88}$$

matris diferensiyel denkleminin bir çözümüdür. $z = \dfrac{1+x}{2}$ ve (4.83) koşulu sağlanmak üzere

$$A^* = A + B + (n+1)I \quad , \quad B^* = -nI \quad , \quad C^* = B + I$$

olarak seçelim. $x = 2z - 1$ den $W'(z) = 2W'(x)$ ve $W''(z) = 4W''(x)$ olmak üzere (4.88) denklemine karşılık gelen

$$\begin{aligned}
&\frac{1+x}{2}\left(1-\frac{1+x}{2}\right)4W''(x) - \frac{1+x}{2}\left(A+B+(n+1)I\right)2W'(x) \\
&+2W'(x)\left(B+I-\frac{1+x}{2}\left(-nI+I\right)\right) - \left(A+B+(n+1)I\right)W(z)\left(-nI\right) \\
&= \left(1-x^2\right)W''(x) - \left(A+B+(n+1)I\right)W'(x) - x\left(A+B+(n+1)I\right)W'(x) \\
&\quad +2W'(x)B + W'(x)\left(n+1-x\left(-n+1\right)\right)I + n\left(A+B+(n+1)I\right)W(z) \\
&= \left(1-x^2\right)W''(x) - \left(A+B\right)W'(x) - x\left(A+B+2I\right)W'(x) \\
&\quad +2W'(x)B + n\left(A+B+(n+1)I\right)W(z) \\
&= \left(1-x^2\right)W''(x) - \left[A+B-x\left(A+B+2I\right)\right]W'(x) + 2W'(x)B \\
&\quad +n\left(A+B+(n+1)I\right)W(z) \\
&= O
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
&\left(1-x^2\right)W''(x) + 2W'(x)B - \left(A+B+x\left(A+B+2I\right)\right)W'(x) \\
&\qquad\qquad + n\left(A+B+(n+1)I\right)W(x) = O
\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Karşılık gelen çözüm fonksiyonu ise

$$F\left(A+B+(n+1)I, -nI; B+I; \frac{1+x}{2}\right)$$

şeklindedir. Sonuç 4.2 den

$$\frac{(-1)^n}{n!}F\left(A+B+(n+1)I, -nI; B+I; \frac{1+x}{2}\right)(B+I)_n = P_n^{(A,B)}(x)$$

yazılabilir. $\dfrac{(-1)^n I}{n!}$ ve $(B+I)_n$ değişkenden bağımsız belirli regüler matrisler olduğundan, $P_n^{(A,B)}(x)$ de çözüm olacaktır. Dolayısıyla $P_n^{(A,B)}(x)$ Jacobi matris polinomu, $-1 < x < 1$ için (4.87) denklemini sağlar. Bu nedenle (4.87) denklemine *Jacobi matris diferensiyel denklemi* denir. ∎

Sonuç 4.3 *$n \geq 0$ tamsayısı için, $-1 < x < 1$ aralığında $P_n^{(A,B)}(x)$ Jacobi matris polinomu*

$$\frac{d}{dx}\left[(1+x)(1-x)^{A+B+I}Y'(x)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{B}\right]$$

$$+n(A+B+(n+1)I)(1-x)^{A+B}Y(x)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{B}=O \tag{4.89}$$

denkleminin bir çözümüdür.

İspat. (4.87) denkleminin her iki yanını soldan $(1-x)^{A+B}$ ve sağdan $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{B}$ ile çarptıktan sonra gerekli düzenlemeler yapıldığında, (4.89) denklemi elde edilir. Dolayısıyla (4.87) denklemininin bir çözümü olan $P_n^{(A,B)}(x)$ Jacobi matris polinomu, (4.89) denkleminin de bir çözümüdür. ■

II. Jacobi Matris Polinomları İçin Rodrigues Formülü

Bu kısımda ilk olarak, Jacobi matris polinomları için Rodrigues formülünün elde edilmesinde kullanılacak bazı lemmalar ispatlarıyla birlikte verilecektir.

Burada $A, B \in \mathbb{C}^{r\times r}$ matrisleri için (4.83) koşuluna ek olarak

$$AB = BA \tag{4.90}$$

koşulu da sağlanmalıdır.

Lemma 4.4 $M, N \in \mathbb{C}^{r\times r}$ *olmak üzere*

$$\left.\begin{array}{c} MN = NM \\ M \quad \text{ve } N-M \quad \text{pozitif kararlı matrisler} \\ \forall k \geq 0 \text{ tamsayısı için } N+kI \quad \text{regüler matris} \end{array}\right\} \tag{4.91}$$

koşulları sağlansın. Bu durumda her n *doğal sayısı için*

$$F(-nI, M; N; 1) = \Gamma(N-M+nI)\,\Gamma^{-1}(N+nI)\,\Gamma^{-1}(N-M)\,\Gamma(N)$$

eşitliği geçerlidir (Defez and Jódar 2002).

İspat. (2.3) gösteriminden, (3.4) ve (4.91) den yararlanarak

$$\begin{aligned}(M)_k(N)_k^{-1} &= \Gamma^{-1}(M)\,\Gamma(M+kI)\left[\Gamma^{-1}(N)\,\Gamma(N+kI)\right]^{-1} \\ &= \Gamma^{-1}(M)\,\Gamma(M+kI)\,\Gamma^{-1}(N+kI)\,\Gamma(N) \\ &= \Gamma^{-1}(M)\,\Gamma^{-1}(N-M)\,\Gamma(N-M)\,\Gamma(M+kI)\,\Gamma^{-1}(N+kI)\,\Gamma(N)\end{aligned} \tag{4.92}$$

yazılabilir. Diğer taraftan (3.17) tanımı, Lemma 3.2 ve Lemma 3.5 den

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{M+(k-1)I}(1-t)^{N-M-I}\,dt &= \mathbf{B}(M+kI,N-M)=\mathbf{B}(N-M,M+kI)\\ &= \Gamma(N-M)\,\Gamma(M+kI)\,\Gamma^{-1}(N+kI) \qquad (4.93)\end{aligned}$$

olup (4.92) ve (4.93) den

$$(M)_k(N)_k^{-1}=\Gamma^{-1}(M)\,\Gamma^{-1}(N-M)\left(\int_0^1 t^{M+(k-1)I}\ (1-t)^{N-M-I}\ dt\right)\Gamma(N) \qquad (4.94)$$

yazılabilir. (4.94) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}&F(-nI,M;N;1)\\ &=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-nI)_k(M)_k(N)_k^{-1}}{k!}\\ &=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,\Gamma^{-1}(M)\,\Gamma^{-1}(N-M)}{k!}\left(\int_0^1 t^{M+(k-1)I}\ (1-t)^{N-M-I}\ dt\right)\Gamma(N)\\ &=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,t^{\,k}}{k!}\right)\Gamma^{-1}(M)\,\Gamma^{-1}(N-M)\,t^{M-I}(1-t)^{N-M-I}\,\Gamma(N)\ dt\end{aligned}$$

bulunur. $n>k$ için $(-n)_k=0$ olduğundan $|t|<1$ için

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,t^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k\,t^k}{k!}=(1-t)^n$$

dir. O halde

$$\begin{aligned}&F(-nI,M;N;1)\\ &=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k\,t^k}{k!}\right)t^{M-I}(1-t)^{N-M-I}\,\Gamma^{-1}(M)\,\Gamma^{-1}(N-M)\,\Gamma(N)\ dt\\ &=\int_0^1 t^{M-I}(1-t)^n(1-t)^{N-M-I}\,\Gamma^{-1}(M)\,\Gamma^{-1}(N-M)\,\Gamma(N)\ dt\\ &=\left(\int_0^1 t^{M-I}(1-t)^{N-M+(n-1)I}\ dt\right)\Gamma^{-1}(M)\,\Gamma^{-1}(N-M)\,\Gamma(N)\end{aligned}$$

şeklindedir. (3.17) tanımı, Lemma 3.2 ve Lemma 3.5 kullanılarak yukarıdaki eşitlikten F nin ifadesi

$$\begin{aligned} F\left(-nI,M;N;1\right) &= \mathbf{B}\left(M,N-M+nI\right)\Gamma^{-1}\left(M\right)\Gamma^{-1}\left(N-M\right)\Gamma\left(N\right) \\ &= \Gamma\left(M\right)\Gamma\left(N-M+nI\right)\Gamma^{-1}\left(N+nI\right)\Gamma^{-1}\left(M\right)\Gamma^{-1}\left(N-M\right)\Gamma\left(N\right) \\ &= \Gamma\left(N-M+nI\right)\Gamma^{-1}\left(N+nI\right)\Gamma^{-1}\left(N-M\right)\Gamma\left(N\right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu ise istenilendir. ■

Lemma 4.5 *$C,E \in \mathbb{C}^{r\times r}$ matrisleri için E pozitif kararlı ve $EC = CE$ olmak üzere,*

$$\forall k \geq 0 \text{ tamsayısı için } C+kI \quad \text{ve} \quad C-E+kI \quad \text{regüler matrisler}$$

koşulu sağlansın. Bu durumda $|t|<1$ ve $n=0,1,...$ için

$$F\left(-nI,E;C;t\right) = \left(1-t\right)^{n} F\left(-nI,C-E;C;\frac{-t}{1-t}\right)$$

dir (Defez and Jódar 2002).

İspat. (2.6) *dan* $|t|<1$ *için*

$$\left(1-t\right)^{n-k} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(k-n\right)_i}{i!}t^i$$

dir. O halde $\left(-nI\right)_k = \left(-n\right)_k I$ *olduğundan ve yukarıdaki eşitlikten*

$$\begin{aligned} &\left(1-t\right)^{n} F\left(-nI,C-E;C;\tfrac{-t}{1-t}\right) \\ &\quad = \left(1-t\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(-nI\right)_k\left(C-E\right)_k\left(C\right)_k^{-1}}{k!}\left(\frac{-t}{1-t}\right)^k \\ &\quad = \sum_{k=0}^{n}\frac{\left(-n\right)_k\left(C-E\right)_k\left(C\right)_k^{-1}}{k!}\left(1-t\right)^{n-k}\left(-1\right)^k t^k \\ &\quad = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(k-n\right)_i\left(-n\right)_k\left(C-E\right)_k\left(C\right)_k^{-1}}{i!k!}\left(-1\right)^k t^{i+k} \end{aligned}$$

dir. $\left(-n\right)_k\left(-n+k\right)_i = \left(-n\right)_{k+i}$ *ve* $k>n$ *için* $\left(-n\right)_k = 0$ *olduğu dikkate alınırsa*

$$\left(1-t\right)^{n} F\left(-nI,C-E;C;\frac{-t}{1-t}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(-n\right)_{k+i}\left(C-E\right)_k\left(C\right)_k^{-1}}{i!k!}\left(-1\right)^k t^{i+k}$$

yazılabilir. (2.16) *dan dolayı, eşitliğin sağında i yerine $i-k$ alınarak*

$$(1-t)^n F\left(-nI, C-E; C; \frac{-t}{1-t}\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i} \frac{(-n)_i (C-E)_k (C)_k^{-1}}{(i-k)!k!} (-1)^k t^i$$

elde edilir. Burada da $(-i)_k = (-1)^k \dfrac{i!}{(i-k)!}$ *eşitliği kullanılırsa*

$$\begin{aligned}(1-t)^n F\left(-nI, C-E; C; \frac{-t}{1-t}\right) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-n)_i}{i!}\left[\sum_{k=0}^{i} \frac{(-i)_k (C-E)_k (C)_k^{-1}}{k!}\right] t^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-n)_i}{i!} F(-iI, C-E; C; 1)\, t^i\end{aligned}$$

bulunur. Lemma 4.4 *den ve* $CE = EC$ *olduğundan*

$$\begin{aligned}&(1-t)^n F\left(-nI, C-E; C; \frac{-t}{1-t}\right) \\ &\qquad = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-n)_i}{i!} \Gamma(E+iI)\,\Gamma^{-1}(C+iI)\,\Gamma^{-1}(E)\,\Gamma(C)\, t^i \\ &\qquad = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-n)_i}{i!} \Gamma(E+iI)\,\Gamma^{-1}(E)\,\Gamma^{-1}(C+iI)\,\Gamma(C)\, t^i\end{aligned}$$

yazılabilir. (3.5) *gösterimi de dikkate alındığında*

$$\begin{aligned}(1-t)^n F\left(-nI, C-E; C; \frac{-t}{1-t}\right) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-nI)_i (E)_i (C)_i^{-1}}{i!} t^i \\ &= F(-nI, E; C; t)\end{aligned}$$

elde edilerek ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.4 *$C, E \in \mathbb{C}^{r\times r}$ matrisleri için E pozitif kararlı ve $EC = CE$ olmak üzere*

$$\forall k \geq 0 \text{ tamsayısı için } C+kI \text{ ve } C-E+kI \text{ regüler matrisler}$$

koşulu sağlansın. Bu durumda $|x| < 1$ ve $n = 0, 1, ...$ için

$$F\left(-nI, E; C; \frac{1+x}{2}\right) = \frac{(1-x)^n}{2^n} F\left(-nI, C-E; C; \frac{x+1}{x-1}\right)$$

dir.

İspat. $|x| < 1$ için $\left|\dfrac{1+x}{2}\right| < 1$ olduğundan Lemma 4.5 de $t = \dfrac{1+x}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned} F\left(-nI, E; C; \frac{1+x}{2}\right) &= \left(1 - \frac{1+x}{2}\right)^n F\left(-nI, C-E; C; \frac{-\frac{1+x}{2}}{1-\frac{1+x}{2}}\right) \\ &= \frac{(1-x)^n}{2^n} F\left(-nI, C-E; C; \frac{x+1}{x-1}\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. ■

(4.86) eşitliğinde gösterildi ki, $A, B \in \mathbb{C}^{r\times r}$ matrisleri için (4.83) ve (4.90) koşulları sağlanmak üzere Jacobi matris polinomlarının ifade edilişinde

$$F\left(A+B+(n+1)I, -nI; B+I; \frac{1+x}{2}\right)$$

hipergeometrik matris fonksiyonu kullanılmıştır. Bu fonksiyonun bilinen özelliklerinden biri de

$$F\left(A+B+(n+1)I, -nI; B+I; \frac{1+x}{2}\right) = F\left(-nI, A+B+(n+1)I; B+I; \frac{1+x}{2}\right)$$

şeklindedir.

$$E = A+B+(n+1)I \qquad \text{ve} \qquad C = B+I$$

ile gösterilmek üzere E pozitif kararlı ve de $EC = CE$ olduğundan Sonuç 4.4 den

$$\begin{aligned} &F\left(-nI, A+B+(n+1)I; B+I; \frac{1+x}{2}\right) \\ &\qquad = \frac{(1-x)^n}{2^n} F\left(-nI, -(A+nI); B+I; \frac{x+1}{x-1}\right) \qquad (4.95) \end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$(-nI)_k = (-n)_k I = \begin{cases} (-1)^k \dfrac{n!}{(n-k)!} I &, \quad k \le n \\ O &, \quad k > n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (-(A+nI))_k &= \{-(A+nI)\}\{-(A+nI)+I\}\ldots\{-(A+nI)+(k-1)I\} \\ &= (-1)^k (A+nI)(A+(n-1)I)\ldots(A+(n+k-1)I) \end{aligned}$$

olduğunu dikkate alarak, (4.86) ve (4.95) den

$$
\begin{aligned}
&P_n^{(A,B)}(x)\\
&= \frac{(-1)^n}{n!}\frac{(1-x)^n}{2^n}F\left(-nI,-(A+nI);B+I;\frac{x+1}{x-1}\right)(B+I)_n\\
&= \frac{(-1)^n(1-x)^n}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-nI)_k(-(A+nI))_k(B+I)_k^{-1}}{k!}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^k(B+I)_n\\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-(A+nI))_k(B+I)_k^{-1}(B+I)_n(1+x)^k(1-x)^{n-k} \qquad (4.96)
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan $D=\dfrac{d}{dx}$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
D^{(k)}\left[(1-x)^{A+nI}\right] &= (-1)^k(A+nI)\ldots(A+(n+k-1)I)(1-x)^{A+(n-k)I}\\
&= (-(A+nI))_k(1-x)^A(1-x)^{n-k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^{(n-k)}\left[(1+x)^{B+nI}\right] &= (B+nI)\ldots(B+(k+1)I)(1+x)^{B+kI}\\
&= (B+nI)\ldots(B+(k+1)I)(B+I)_k(B+I)_k^{-1}(1+x)^{B+kI}\\
&= (B+I)_k^{-1}(B+I)_n(1+x)^B(1+x)^k
\end{aligned}
$$

eşitliklerinden ve (4.96) dan

$$P_n^{(A,B)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-A}(1+x)^{-B}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^{(k)}\left[(1-x)^{A+nI}\right]D^{(n-k)}\left[(1+x)^{B+nI}\right]$$

olup, çarpımın türevi için Leibniz kuralından dolayı da bu son eşitlikten

$$P_n^{(A,B)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-A}(1+x)^{-B}D^{(n)}\left[(1-x)^{A+nI}(1+x)^{B+nI}\right]$$

elde edilir. Bu sonucu aşağıdaki teoremle özetleyelim.

Teorem 4.7 *$A,B\in\mathbb{C}^{r\times r}$ matrisleri için (4.83) ve (4.90) koşulları sağlanmak üzere, $n=0,1,\ldots$ için (4.84) ile verilen $P_n^{(A,B)}(x)$ Jacobi matris polinomları*

$$P_n^{(A,B)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-A}(1+x)^{-B}D^{(n)}\left[(1-x)^{A+nI}(1+x)^{B+nI}\right] \qquad (4.97)$$

şeklinde de ifade edilir. Bu ifadeye Jacobi matris polinomları için Rodrigues formülü denir (Defez et al. 2004).

III. Jacobi Matris Polinomlarının Ortogonalliği

Lemma 4.6 *$A, B \in \mathbb{C}^{r\times r}$ matrisleri için (4.83) ve (4.90) koşulları sağlansın. $Q(x)$ keyfi bir matris polinomu olmak üzere*

$$\lim_{x\to 1^-} \left(1-x^2\right)(1-x)^A (1+x)^B Q(x) = O$$

ve

$$\lim_{x\to -1^+} \left(1-x^2\right)(1-x)^A (1+x)^B Q(x) = O$$

eşitlikleri geçerlidir (Defez et al. 2004).

İspat. $(1-x^2)(1-x)^A(1+x)^B Q(x) = (1-x)^{A+I}(1+x)^{B+I} Q(x)$ dır. İlk olarak $x \to 1^-$ durumunu dikkate alalım. $x = 1$ in sınırlı açık bir komşuluğu V olsun. $Q(x)$ süreklidir ve bu nedenle V nin kapanışında sınırlıdır. Böylece

$$\|Q(x)\| \leq K_1 \quad ; \qquad \forall x \in V \quad \text{ve} \quad K_1 \in \mathbb{R}^+$$

dir. Keyfi bir $P \in \mathbb{C}^{r\times r}$ matrisi için Lemma 2.10 dan

$$\left\|e^{Pt}\right\| \leq e^{t\alpha(P)} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\left(\|N\| \sqrt{r}\ t\right)^k}{k!} \tag{4.98}$$

dir. O halde $A+I$ matrisinin Schur ayrışımı $Q^H(A+I)Q = D+N$ olmak üzere

$$\left\|(1-x)^{A+I}\right\| \leq (1-x)^{\alpha(A+I)} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\left(\|N\| \sqrt{r} \ln(1-x)\right)^k}{k!} \tag{4.99}$$

dir. A matrisi için (4.83) ve (4.90) koşulları sağlandığından dolayı $A+I$ matrisi için

$$\forall z \in \sigma(A+I) \quad \text{için} \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

olacaktır. Buradan $\alpha(A+I) > 0$ olduğu görülmektedir. $0 \leq j \leq r-1$ için

$$\lim_{t\to 0^+} t^a |\ln t|^j = 0 \quad , \qquad a > 0$$

olduğundan dolayı

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{\alpha(A+I)} |\ln(1-x)|^j = 0 \quad , \qquad j = 0, 1, ..., r-1$$

dir. Fakat

$$0 \leq \left\| (1-x)^{A+I} \right\| \leq (1-x)^{\alpha(A+I)} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\left(\|N\| \sqrt{r} \ln(1-x) \right)^k}{k!}$$

ifadesindeki son terim $x \to 1^-$ için sıfıra yaklaştığından eşitsizlik üstten sınırlıdır. O halde

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x)^{A+I} = O$$

dır. Diğer taraftan

$$\lim_{x \to 1^-} (1+x)^{B+I} = 2^{B+I}$$

ve $\left\| (1+x)^{B+I} \right\|$, V de sınırlıdır. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| (1-x)^{A+I} \ (1+x)^{B+I} \ Q(x) \right\| \\ &\leq \left\| (1-x)^{A+I} \right\| \left\| (1+x)^{B+I} \right\| \|Q(x)\| \\ &\leq K_1 \left\| (1-x)^{A+I} \right\| \left\| (1+x)^{B+I} \right\| \end{aligned}$$

olup

$$\lim_{x \to 1^-} \left(1-x^2\right)(1-x)^A (1+x)^B Q(x) = O$$

elde edilir. Tamamen yukarıdaki işleme benzer şekilde

$$\lim_{x \to -1^+} \left(1-x^2\right)(1-x)^A (1+x)^B Q(x) = O$$

olduğu da gösterilebilir. ■

Lemma 4.7 *$K, L \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisleri için*

$$\forall z \in \sigma(K) \quad \textit{için} \quad \mathrm{Re}(z) > -1 \qquad \textit{ve} \qquad \forall w \in \sigma(L) \quad \textit{için} \quad \mathrm{Re}(w) > -1 \quad (4.100)$$

koşulları sağlanmak üzere

$$\int_{-1}^{1} (1+x)^K (1-x)^L \, dx = 2^{K+I} \mathbf{B}(K+I, L+I) \, 2^L$$

dir (Defez and Jódar 2002).

İspat. $\int\limits_{-1}^{1} (1+x)^K (1-x)^L \, dx$ integralinde $t = \dfrac{1+x}{1-x}$ dönüşümü yapalım. Bu durumda $x = \dfrac{t-1}{t+1}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-1}^{1} (1+x)^K (1-x)^L \, dx &= \int\limits_{0}^{\infty} \left(1+\frac{t-1}{t+1}\right)^K \left(1-\frac{t-1}{t+1}\right)^L d\left(\frac{t-1}{t+1}\right) \\
&= \int\limits_{0}^{\infty} 2^K \left(\frac{t}{t+1}\right)^K \left(\frac{1}{t+1}\right)^L 2^L \frac{2}{(t+1)^2} dt \\
&= 2^{K+I} \left[\int\limits_{0}^{\infty} t^K \left(\frac{1}{t+1}\right)^{K+L+2I} dt \right] 2^L
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eşitliğin sağındaki integralde $u = \dfrac{1}{1+t}$ dönüşümü yapılırsa $t = \dfrac{1-u}{u}$ olup

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-1}^{1} (1+x)^K (1-x)^L \, dx &= 2^{K+I} \left[\int\limits_{1}^{0} \left(\frac{1-u}{u}\right)^K u^{K+L+2I} d\left(\frac{1-u}{u}\right) \right] 2^L \\
&= 2^{K+I} \left[\int\limits_{1}^{0} (1-u)^K \; u^{-K} \; u^{K+L+2I} \frac{-1}{u^2} du \right] 2^L \\
&= 2^{K+I} \left[\int\limits_{0}^{1} (1-u)^K \; u^L \; du \right] 2^L
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.100) koşulu altında, Beta matris fonksiyonunun tanımından

$$
\mathbf{B}(K+I, L+I) = \int\limits_{0}^{1} (1-u)^K \; u^L \; du
$$

olup, yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$
\int\limits_{-1}^{1} (1+x)^K (1-x)^L \, dx = 2^{K+I} \mathbf{B}(K+I, L+I) \, 2^L
$$

olarak elde edilir. ■

$A, B \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisleri için (4.83) ve (4.90) koşulları sağlanmak üzere (4.87) denkleminin (4.89) self-adjoint formu, $P_n^{(A,B)}(x)$ in (4.89) denklemini sağladığını da dikkate alarak

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)(1-x)^A(1+x)^B\frac{d}{dx}P_n^{(A,B)}(x)\right]$$
$$+n\left(A+B+(n+1)I\right)(1-x)^A(1+x)^B P_n^{(A,B)}(x)=O \qquad (4.101)$$

şeklinde yazılabilir. (4.101) denklemininin her iki yanı sağdan $P_m^{(A,B)}(x)$ ile çarpılırsa

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)(1-x)^A(1+x)^B\frac{d}{dx}P_n^{(A,B)}(x)\right]P_m^{(A,B)}(x)$$
$$+n\left(A+B+(n+1)I\right)(1-x)^A(1+x)^B P_n^{(A,B)}(x)\,P_m^{(A,B)}(x)=O \qquad (4.102)$$

elde edilir. (4.102) denkleminde m ile n nin rolleri değiştirildiğinde ise

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)(1-x)^A(1+x)^B\frac{d}{dx}P_m^{(A,B)}(x)\right]P_n^{(A,B)}(x)$$
$$+m\left(A+B+(m+1)I\right)(1-x)^A(1+x)^B P_m^{(A,B)}(x)\,P_n^{(A,B)}(x)=O \qquad (4.103)$$

bulunur. $-1<x<1$ olmak üzere, Jacobi matris polinomlarının çarpma işlemine göre değişmeli olduğunu gözönünde bulundurarak, (4.102) ve (4.103) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)(1-x)^A(1+x)^B\frac{d}{dx}P_n^{(A,B)}(x)\right]P_m^{(A,B)}(x)$$
$$-\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)(1-x)^A(1+x)^B\frac{d}{dx}P_m^{(A,B)}(x)\right]P_n^{(A,B)}(x)$$
$$+(n-m)\left(A+B+(m+n+1)I\right)(1-x)^A(1+x)^B P_n^{(A,B)}(x)\,P_m^{(A,B)}(x)=O$$
$$(4.104)$$

eşitliği elde edilir. (4.104) eşitliğinin soluna

$$\left[\left(1-x^2\right)(1-x)^A(1+x)^B\frac{d}{dx}P_n^{(A,B)}(x)\right]\frac{d}{dx}P_m^{(A,B)}(x)$$

ve

$$\left[\left(1-x^2\right)(1-x)^A(1+x)^B\frac{d}{dx}P_m^{(A,B)}(x)\right]\frac{d}{dx}P_n^{(A,B)}(x)$$

terimlerini ekleyip çıkardıktan sonra gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)(1-x)^A(1+x)^B\left\{P_m^{(A,B)}(x)\frac{d}{dx}P_n^{(A,B)}(x)-\left(\frac{d}{dx}P_m^{(A,B)}(x)\right)P_n^{(A,B)}(x)\right\}\right]$$
$$+(n-m)\left(A+B+(m+n+1)I\right)(1-x)^A(1+x)^B P_n^{(A,B)}(x)\,P_m^{(A,B)}(x)=O$$
$$(4.105)$$

bulunur. Burada, kısalık için

$$Q(x) = P_m^{(A,B)}(x)\frac{d}{dx}P_n^{(A,B)}(x) - \left(\frac{d}{dx}P_m^{(A,B)}(x)\right)P_n^{(A,B)}(x)$$

olmak üzere, (4.105) eşitliğini $-1 \leq x \leq 1$ aralığında integre edersek

$$(m-n)(A+B+(m+n+1)I)\int_{-1}^{1}(1-x)^A(1+x)^B P_n^{(A,B)}(x)P_m^{(A,B)}(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)(1-x)^A(1+x)^B Q(x)\right]dx$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\left(1-x^2\right)(1-x)^A(1+x)^B Q(x) - \lim_{x\to -1^+}\left(1-x^2\right)(1-x)^A(1+x)^B Q(x)$$

olur. Burada Lemma 4.6 nın kullanılmasıyla, $A+B+(m+n+1)I$ regüler bir matris olmak üzere

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^A(1+x)^B P_n^{(A,B)}(x)P_m^{(A,B)}(x)\,dx = O \quad , \qquad n \neq m$$

elde edilir.

Jacobi matris polinomlarının ortogonalliğinin ispatının tamamlanması için $n = 0, 1, ...$ olmak üzere

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^A(1+x)^B\left[P_n^{(A,B)}(x)\right]^2 dx$$

integrali ile tanımlanan matrisin regüler olduğunu doğrulamak gerekir.

Teorem 4.7 den

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^A(1+x)^B\left[P_n^{(A,B)}(x)\right]^2 dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}P_n^{(A,B)}(x)\,D^{(n)}\left[(1-x)^{A+nI}(1+x)^{B+nI}\right]dx \tag{4.106}$$

dir. $n \geq 1$ ve $1 \leq k \leq n$ için Lemma 4.6 dan

$$\left.\begin{array}{l}
\lim\limits_{x\to 1^-} D^{(n-1)}\left[(1-x)^{A+nI}(1+x)^{B+nI}\right]P_n^{(A,B)}(x)=O\\
\lim\limits_{x\to -1^+} D^{(n-1)}\left[(1-x)^{A+nI}(1+x)^{B+nI}\right]P_n^{(A,B)}(x)=O\\
\lim\limits_{x\to 1^-} D^{(n-2)}\left[(1-x)^{A+nI}(1+x)^{B+nI}\right]P_n^{(A,B)}(x)=O\\
\lim\limits_{x\to -1^+} D^{(n-2)}\left[(1-x)^{A+nI}(1+x)^{B+nI}\right]P_n^{(A,B)}(x)=O\\
\vdots\\
\lim\limits_{x\to 1^-} D^{(n-k)}\left[(1-x)^{A+nI}(1+x)^{B+nI}\right]P_n^{(A,B)}(x)=O\\
\lim\limits_{x\to -1^+} D^{(n-k)}\left[(1-x)^{A+nI}(1+x)^{B+nI}\right]P_n^{(A,B)}(x)=O
\end{array}\right\} \tag{4.107}$$

dır. (4.106) eşitliğinin sağındaki kısma bir defa kısmi integrasyon uygulandığında

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} P_n^{(A,B)}(x)\,D^{(n)}\left[(1-x)^{A+nI}(1+x)^{B+nI}\right]dx\\
&\quad=-\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}P_n^{(A,B)}(x)\,D^{(n-1)}\left[(1-x)^{A+nI}(1+x)^{B+nI}\right]dx\\
&\qquad+\frac{(-1)^n}{2^n n!}D^{(n-1)}\left[(1-x)^{A+nI}(1+x)^{B+nI}\right]P_n^{(A,B)}(x)\Big|_{-1}^{1}
\end{aligned}$$

olup burada (4.107) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} P_n^{(A,B)}(x)\,D^{(n)}\left[(1-x)^{A+nI}(1+x)^{B+nI}\right]dx\\
&\quad=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}P_n^{(A,B)}(x)\,D^{(n-1)}\left[(1-x)^{A+nI}(1+x)^{B+nI}\right]dx
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.107) dikkate alınarak bu işlem $n-1$ kez daha uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}(1-x)^{A}(1+x)^{B}\left[P_n^{(A,B)}(x)\right]^2dx\\
&\quad=\frac{(-1)^{n+n}}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}P_n^{(A,B)}(x)\left[(1-x)^{A+nI}(1+x)^{B+nI}\right]dx
\end{aligned}\tag{4.108}$$

elde edilir. (4.84) eşitliğinden $\frac{d^n}{dx^n}P_n^{(A,B)}(x)$ direkt olarak hesaplandığında

$$\frac{d^n}{dx^n}P_n^{(A,B)}(x)=\frac{1}{2^n}\Gamma(A+B+(2n+1)I)\,\Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I)$$

şeklinde olup, bu değer (4.108) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{A} (1+x)^{B} \left[P_n^{(A,B)}(x)\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{2^{2n} n!} \Gamma(A+B+(2n+1)I)\, \Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I) \times \int_{-1}^{1} (1-x)^{A+nI} (1+x)^{B+nI} dx \qquad (4.109)$$

bulunur. $AB = BA$ olduğunu dikkate alarak, Lemma 4.7 den $K = B + nI$ ve $L = A + nI$ alınırsa

$$\int_{-1}^{1} (1+x)^{B+nI} (1-x)^{A+nI} dx = 2^{B+(n+1)I} \mathbf{B}(B+(n+1)I, A+(n+1)I)\, 2^{A+nI} \qquad (4.110)$$

olur. Teorem 3.3 den dolayı,

$$\mathbf{B}(B+(n+1)I, A+(n+1)I) = \Gamma(B+(n+1)I)\, \Gamma(A+(n+1)I) \times \Gamma^{-1}(A+B+2(n+1)I) \qquad (4.111)$$

dır. (4.109), (4.110) ve (4.111) den

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{A} (1+x)^{B} \left[P_n^{(A,B)}(x)\right]^2 dx$$

$$= \frac{2^{A+B+I}}{n!} \Gamma(A+B+(2n+1)I)\, \Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I)\, \Gamma(B+(n+1)I) \times \Gamma(A+(n+1)I)\, \Gamma^{-1}(A+B+2(n+1)I)$$

olarak bulunur. Buradan görülmektedir ki, ikinci yan regülerdir. O halde,

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{A} (1+x)^{B} \left[P_n^{(A,B)}(x)\right]^2 dx$$

integralinin tanımladığı matris de regülerdir.

Teorem 4.8 *$A, B \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisleri için (4.83) ve (4.90) koşulları sağlanmak üzere, negatif olmayan n tamsayıları için*

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{A} (1+x)^{B} P_n^{(A,B)}(x) P_m^{(A,B)}(x)\, dx$$

$$= \begin{cases} O & , \quad n \neq m \\ \frac{2^{A+B+I}}{n!} \Gamma\left(A+B+(2n+1)I\right) \Gamma^{-1}\left(A+B+(n+1)I\right) & \\ \times \Gamma\left(B+(n+1)I\right) \Gamma\left(A+(n+1)I\right) \Gamma^{-1}\left(A+B+2(n+1)I\right) & , \quad n=m \end{cases}$$

olduğundan, $\left\{P_n^{(A,B)}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ *Jacobi matris polinom ailesi,* $[-1,1]$ *aralığında* $W(x,A,B) = (1-x)^{A}(1+x)^{B}$ *matris ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir (Defez et al. 2004).*

IV. Jacobi Matris Polinomları İçin Üç Terimli Matris Rekürans Bağıntısı

(4.84) ile verilen $P_n^{(A,B)}(x)$ Jacobi matris polinomlarının $n \geq 1$ için başkatsayı matrisi regülerdir. n-yinci dereceden herhangi bir $Q(x)$ matris polinomu

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \Lambda_k P_k^{(A,B)}(x) \tag{4.112}$$

formunda tek şekilde ifade edilebilir (Jódar *et al.* 1996). Burada $k = 0, 1, ..., n$ için $\Lambda_k \in \mathbb{C}^{r \times r}$ belirlenecek matrislerdir. $P(x)$, en fazla $n-1$ dereceden bir matris polinomu olmak üzere, Teorem 4.8 ve (4.112) eşitliğinden

$$\int_{-1}^{1} P(x) (1-x)^{A} (1+x)^{B} P_n^{(A,B)}(x)\, dx = O \tag{4.113}$$

yazılır. $n \geq 0$ için $(1+x) P_n^{(A,B)}(x)$ matris polinomu $(n+1)$. dereceden olup (4.112) eşitliğinden

$$(1+x) P_n^{(A,B)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \Lambda_k P_k^{(A,B)}(x) \quad , \quad \Lambda_k \in \mathbb{C}^{r \times r} \tag{4.114}$$

dir. $k = 0, 1, ..., n+1$ için Λ_k katsayılarını belirleyelim. Teorem 4.8 i dikkate alarak, eşitliğin her iki yanını $(1-x)^{A}(1+x)^{B} P_s^{(A,B)}(x)$ ile sağdan çarptıktan sonra $[-1,1]$ aralığında integre edilirse

$$\int_{-1}^{1} (1+x) P_n^{(A,B)}(x) (1-x)^A (1+x)^B P_s^{(A,B)}(x) \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \Lambda_k P_k^{(A,B)}(x) (1-x)^A (1+x)^B P_s^{(A,B)}(x) \right) dx$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq s}}^{n+1} \left(\Lambda_k \int_{-1}^{1} P_k^{(A,B)}(x) (1-x)^A (1+x)^B P_s^{(A,B)}(x) \, dx \right)$$

$$+ \Lambda_s \int_{-1}^{1} P_s^{(A,B)}(x) (1-x)^A (1+x)^B P_s^{(A,B)}(x) \, dx$$

$$= \Lambda_s \int_{-1}^{1} P_s^{(A,B)}(x) (1-x)^A (1+x)^B P_s^{(A,B)}(x) \, dx$$

olarak bulunur. s yerine k alarak elde edilen son eşitliği tekrar yazalım.

$$\Lambda_k \int_{-1}^{1} (1-x)^A (1+x)^B \left(P_k^{(A,B)}(x) \right)^2 dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (1+x) P_n^{(A,B)}(x) (1-x)^A (1+x)^B P_k^{(A,B)}(x) \, dx$$

Eşitliğin sağındaki integral, $k = 0, 1, ..., n-2$ için (4.113) eşitliğinden dolayı O matrisine eşit olacaktır. Dolayısıyla $k \leq n-2$ için $\Lambda_k = O$ olduğundan (4.114) eşitliğinden

$$(1+x) P_n^{(A,B)}(x) = \Lambda_{n-1} P_{n-1}^{(A,B)}(x) + \Lambda_n P_n^{(A,B)}(x) + \Lambda_{n+1} P_{n+1}^{(A,B)}(x) \qquad (4.115)$$

yazılabilir. $A, B \in \mathbb{C}^{r\times r}$ matrisleri için (4.83) ve (4.90) koşulları sağlanmak üzere, (4.115) deki Λ_{n-1}, Λ_n, $\Lambda_{n+1} \in \mathbb{C}^{r\times r}$ matrislerini belirleyelim. Jacobi matris polinomlarının (4.84) gösteriminden yararlanarak $P_n^{(A,B)}(x)$, $P_{n-1}^{(A,B)}(x)$ ve $P_{n+1}^{(A,B)}(x)$ matris polinomlarının ifadeleri (4.115) de yerlerine yazılırsa

$$(1+x) \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \frac{(-1)^{n+k}}{2^k n!} \Gamma(A+B+(n+k+1)I) \Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I) \right.$$
$$\left. .\, \Gamma(B+(n+1)I) \Gamma^{-1}(B+(k+1)I) (1+x)^k \right]$$

$$= \Lambda_{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\binom{n-1}{k}\frac{(-1)^{n+k-1}}{2^k(n-1)!}\Gamma(A+B+(n+k)I)\Gamma^{-1}(A+B+nI)\right.$$
$$\left. .\,\Gamma(B+nI)\Gamma^{-1}(B+(k+1)I)(1+x)^k\right]$$
$$+\Lambda_n\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n+k}}{2^k n!}\Gamma(A+B+(n+k+1)I)\right.$$
$$\left. .\,\Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I)\Gamma(B+(n+1)I)\Gamma^{-1}(B+(k+1)I)(1+x)^k\right]$$
$$+\Lambda_{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}\left[\binom{n+1}{k}\frac{(-1)^{n+k+1}}{2^k(n+1)!}\Gamma(A+B+(n+k+2)I)\Gamma^{-1}(A+B+(n+2)I)\right.$$
$$\left. .\,\Gamma(B+(n+2)I)\Gamma^{-1}(B+(k+1)I)(1+x)^k\right]$$

bulunur. Burada ilk olarak eşitliğin solundaki toplamın önündeki $(1+x)$ katsayısını toplam içine aldıktan sonra toplamda k yerine $k-1$ alalım ve toplamların sınırlarını $k=1$ den $k=n-2$ ye olacak şekilde düzenleyelim. Bu işlem yapıldığında ise

$$\sum_{k=1}^{n-2}\left[\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^{n+k-1}}{2^{k-1}n!}\Gamma(A+B+(n+k)I)\Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I)\right.$$
$$\left. .\,\Gamma(B+(n+1)I)\Gamma^{-1}(B+kI)(1+x)^k\right]$$
$$+\binom{n}{n-2}\frac{(-1)^{2n-2}}{2^{n-2}n!}\Gamma(A+B+(2n-1)I)\Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I)\Gamma(B+(n+1)I)$$
$$.\Gamma^{-1}(B+(n-1)I)(1+x)^{n-1}$$
$$+\binom{n}{n-1}\frac{(-1)^{2n-1}}{2^{n-1}n!}\Gamma(A+B+2nI)\Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I)\Gamma(B+(n+1)I)$$
$$.\Gamma^{-1}(B+nI)(1+x)^n$$
$$+\binom{n}{n}\frac{(-1)^{2n}}{2^n n!}\Gamma(A+B+(2n+1)I)\Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I)$$
$$.\Gamma(B+(n+1)I)\Gamma^{-1}(B+(n+1)I)(1+x)^{n+1}$$
$$= \Lambda_{n-1}\binom{n-1}{0}\frac{(-1)^{n-1}}{2^0(n-1)!}\Gamma(A+B+nI)\Gamma^{-1}(A+B+nI)\Gamma(B+nI)\Gamma^{-1}(B+I)$$
$$+\Lambda_{n-1}\sum_{k=1}^{n-2}\left[\binom{n-1}{k}\frac{(-1)^{n+k-1}}{2^k(n-1)!}\Gamma(A+B+(n+k)I)\Gamma^{-1}(A+B+nI)\right.$$
$$\left. .\,\Gamma(B+nI)\Gamma^{-1}(B+(k+1)I)(1+x)^k\right]$$

$$+\Lambda_{n-1}\binom{n-1}{n-1}\frac{(-1)^{2n-2}}{2^{n-1}(n-1)!}\Gamma(A+B+(2n-1)I)\Gamma^{-1}(A+B+nI)\Gamma(B+nI)$$
$$.\Gamma^{-1}(B+nI)(1+x)^{n-1}$$
$$+\Lambda_{n}\binom{n}{0}\frac{(-1)^{n}}{2^{0}n!}\Gamma(A+B+(n+1)I)\Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I)$$
$$.\Gamma(B+(n+1)I)\Gamma^{-1}(B+I)$$
$$+\Lambda_{n}\sum_{k=1}^{n-2}\left[\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n+k}}{2^{k}n!}\Gamma(A+B+(n+k+1)I)\right.$$
$$\left.\,.\,\Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I)\Gamma(B+(n+1)I)\Gamma^{-1}(B+(k+1)I)(1+x)^{k}\right]$$
$$+\Lambda_{n}\binom{n}{n-1}\frac{(-1)^{2n-1}}{2^{n-1}n!}\Gamma(A+B+2nI)\Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I)\Gamma(B+(n+1)I)$$
$$.\Gamma^{-1}(B+nI)(1+x)^{n-1}$$
$$+\Lambda_{n}\binom{n}{n}\frac{(-1)^{2n}}{2^{n}n!}\Gamma(A+B+(2n+1)I)$$
$$.\Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I)\Gamma(B+(n+1)I)\Gamma^{-1}(B+(n+1)I)(1+x)^{n}$$
$$+\Lambda_{n+1}\binom{n+1}{0}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{0}(n+1)!}\Gamma(A+B+(n+2)I)\Gamma^{-1}(A+B+(n+2)I)$$
$$.\Gamma(B+(n+2)I)\Gamma^{-1}(B+I)$$
$$+\Lambda_{n+1}\sum_{k=0}^{n-2}\left[\binom{n+1}{k}\frac{(-1)^{n+k+1}}{2^{k}(n+1)!}\Gamma(A+B+(n+k+2)I)\Gamma^{-1}(A+B+(n+2)I)\right.$$
$$\left.\,.\,\Gamma(B+(n+2)I)\Gamma^{-1}(B+(k+1)I)(1+x)^{k}\right]$$
$$+\Lambda_{n+1}\binom{n+1}{n-1}\frac{(-1)^{2n}}{2^{n-1}(n+1)!}\Gamma(A+B+(2n+1)I)\Gamma^{-1}(A+B+(n+2)I)$$
$$.\Gamma(B+(n+2)I)\Gamma^{-1}(B+nI)(1+x)^{n-1}$$
$$+\Lambda_{n+1}\binom{n+1}{n}\frac{(-1)^{2n+1}}{2^{n}(n+1)!}\Gamma(A+B+(2n+2)I)\Gamma^{-1}(A+B+(n+2)I)$$
$$.\Gamma(B+(n+2)I)\Gamma^{-1}(B+(n+1)I)(1+x)^{n}$$
$$+\Lambda_{n+1}\binom{n+1}{n+1}\frac{(-1)^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)!}\Gamma(A+B+(2n+3)I)\Gamma^{-1}(A+B+(n+2)I)$$
$$.\Gamma(B+(n+2)I)\Gamma^{-1}(B+(n+2)I)(1+x)^{n+1}$$

olarak bulunur. Karşılıklı olarak $1+x$ in kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse;

$(1+x)^{0}$ ın katsayısı,

$$\begin{aligned} O &= \Lambda_{n-1}\binom{n-1}{0}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{0}(n-1)!}\Gamma(A+B+nI)\Gamma^{-1}(A+B+nI)\Gamma(B+nI)\Gamma^{-1}(B+I) \\ &\quad+\Lambda_{n}\binom{n}{0}\frac{(-1)^{n}}{2^{0}n!}\Gamma(A+B+(n+1)I)\Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I) \\ &\quad.\Gamma(B+(n+1)I)\Gamma^{-1}(B+I) \end{aligned}$$

$$+\Lambda_{n+1}\binom{n+1}{0}\frac{(-1)^{n+1}}{2^0(n+1)!}\Gamma(A+B+(n+2)I)\Gamma^{-1}(A+B+(n+2)I)$$
$$.\Gamma(B+(n+2)I)\Gamma^{-1}(B+I)$$

dan

$$n(n+1)\Lambda_{n-1}-(n+1)\Lambda_n(B+nI)+\Lambda_{n+1}(B+nI)(B+(n+1)I)=O \quad (4.116)$$

şeklinde, $1\leq k\leq n-2$ için $(1+x)^k$ nın katsayısı

$$\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^{n+k-1}}{2^{k-1}n!}\Gamma(A+B+(n+k)I)\Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I)$$
$$.\Gamma(B+(n+1)I)\Gamma^{-1}(B+kI)$$
$$=\Lambda_{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{(-1)^{n+k-1}}{2^k(n-1)!}\Gamma(A+B+(n+k)I)\Gamma^{-1}(A+B+nI)$$
$$.\Gamma(B+nI)\Gamma^{-1}(B+(k+1)I)$$
$$+\Lambda_n\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n+k}}{2^kn!}\Gamma(A+B+(n+k+1)I)\Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I)$$
$$.\Gamma(B+(n+1)I)\Gamma^{-1}(B+(k+1)I)$$
$$+\Lambda_{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{(-1)^{n+k+1}}{2^k(n+1)!}\Gamma(A+B+(n+k+2)I)\Gamma^{-1}(A+B+(n+2)I)$$
$$.\Gamma(B+(n+2)I)\Gamma^{-1}(B+(k+1)I)$$

dan

$$(A+B+(n+k)I)^{-1}(A+B+(n+k+1)I)^{-1}(A+B+(n+1)I)(B+nI)$$
$$=(n-k+1)(n-k)\Lambda_{n-1}(A+B+(n+k)I)^{-1}(A+B+(n+k+1)I)^{-1}$$
$$.(A+B+nI)(A+B+(n+1)I)(B+kI)^{-1}$$
$$-(n-k+1)\Lambda_n(A+B+(n+k+1)I)^{-1}(A+B+(n+1)I)(B+kI)^{-1}(B+nI)$$
$$+\Lambda_{n+1}(B+kI)^{-1}(B+nI)(B+(n+1)I) \quad (4.117)$$

şeklinde, $(1+x)^{n-1}$ in katsayısı

$$\binom{n}{n-2}\frac{(-1)^{2n-2}}{2^{n-2}n!}\Gamma(A+B+(2n-1)I)\Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I)$$
$$.\Gamma(B+(n+1)I)\Gamma^{-1}(B+(n-1)I)$$
$$=\Lambda_{n-1}\binom{n-1}{n-1}\frac{(-1)^{2n-2}}{2^{n-1}(n-1)!}\Gamma(A+B+(2n-1)I)\Gamma^{-1}(A+B+nI)$$
$$.\Gamma(B+nI)\Gamma^{-1}(B+nI)$$

$$
\begin{aligned}
&+\Lambda_n\binom{n}{n-1}\frac{(-1)^{2n-1}}{2^{n-1}n!}\Gamma\left(A+B+2nI\right)\Gamma^{-1}\left(A+B+(n+1)I\right)\\
&.\Gamma\left(B+(n+1)I\right)\Gamma^{-1}\left(B+nI\right)\\
&+\Lambda_{n+1}\binom{n+1}{n-1}\frac{(-1)^{2n}}{2^{n-1}(n+1)!}\Gamma\left(A+B+(2n+1)I\right)\Gamma^{-1}\left(A+B+(n+2)I\right)\\
&.\Gamma\left(B+(n+2)I\right)\Gamma^{-1}\left(B+nI\right)
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
&2(n-1)\left(A+B+(2n-1)I\right)^{-1}\left(A+B+2nI\right)^{-1}\left(A+B+(n+1)I\right)\left(B+nI\right)\\
&=2\Lambda_{n-1}\left(A+B+(2n-1)I\right)^{-1}\left(A+B+2nI\right)^{-1}\left(A+B+nI\right)\\
&.\left(A+B+(n+1)I\right)\left(B+(n-1)I\right)^{-1}\\
&-2\Lambda_n\left(A+B+2nI\right)^{-1}\left(A+B+(n+1)I\right)\left(B+(n-1)I\right)^{-1}\left(B+nI\right)\\
&+\Lambda_{n+1}\left(B+(n-1)I\right)^{-1}\left(B+nI\right)\left(B+(n+1)I\right) \qquad (4.118)
\end{aligned}
$$

şeklinde, $(1+x)^n$ in katsayısı,

$$
\begin{aligned}
&\binom{n}{n-1}\frac{(-1)^{2n-1}}{2^{n-1}n!}\Gamma\left(A+B+2nI\right)\Gamma^{-1}\left(A+B+(n+1)I\right)\Gamma\left(B+(n+1)I\right)\\
&.\Gamma^{-1}\left(B+nI\right)(1+x)^n\\
&=\Lambda_n\binom{n}{n}\frac{(-1)^{2n}}{2^n n!}\Gamma\left(A+B+(2n+1)I\right)\Gamma^{-1}\left(A+B+(n+1)I\right)\Gamma\left(B+(n+1)I\right)\\
&.\Gamma^{-1}\left(B+(n+1)I\right)\\
&+\Lambda_{n+1}\binom{n+1}{n}\frac{(-1)^{2n+1}}{2^n(n+1)!}\Gamma\left(A+B+(2n+2)I\right)\Gamma^{-1}\left(A+B+(n+2)I\right)\\
&.\Gamma\left(B+(n+2)I\right)\Gamma^{-1}\left(B+(n+1)I\right)
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
&2n\left(A+B+2nI\right)^{-1}\left(A+B+(2n+1)I\right)^{-1}\left(A+B+(n+1)I\right)\\
&=-\Lambda_n\left(A+B+(2n+1)I\right)^{-1}\left(A+B+(n+1)I\right)\left(B+nI\right)^{-1}\\
&+\Lambda_{n+1}\left(B+(n+1)I\right)\left(B+nI\right)^{-1} \qquad (4.119)
\end{aligned}
$$

şeklinde ve $(1+x)^{n+1}$ in katsayısı ise

$$\binom{n}{n}\frac{(-1)^{2n}}{2^n n!}\Gamma\left(A+B+(2n+1)I\right)\Gamma^{-1}\left(A+B+(n+1)I\right)\Gamma\left(B+(n+1)I\right)$$
$$.\Gamma^{-1}\left(B+(n+1)I\right)$$
$$=\Lambda_{n+1}\binom{n+1}{n+1}\frac{(-1)^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)!}\Gamma\left(A+B+(2n+3)I\right)\Gamma^{-1}\left(A+B+(n+2)I\right)$$
$$.\Gamma\left(B+(n+2)I\right)\Gamma^{-1}\left(B+(n+2)I\right)$$

dan

$$\begin{aligned}\Lambda_{n+1} &= 2(n+1)\left(A+B+(n+1)I\right)\left(A+B+(2n+1)I\right)^{-1}\\ &\quad .\left(A+B+(2n+2)I\right)^{-1}\end{aligned}\tag{4.120}$$

olarak bulunur. Λ_{n+1} değeri (4.119) da yerine yazıldığında

$$2n\left(A+B+2nI\right)^{-1}\left(A+B+(2n+1)I\right)^{-1}\left(A+B+(n+1)I\right)$$
$$=-\Lambda_n\left(A+B+(2n+1)I\right)^{-1}\left(A+B+(n+1)I\right)\left(B+nI\right)^{-1}$$
$$+2(n+1)\left(A+B+(n+1)I\right)\left(A+B+(2n+1)I\right)^{-1}\left(A+B+(2n+2)I\right)^{-1}$$
$$.\left(B+(n+1)I\right)\left(B+nI\right)^{-1}$$

olup buradan

$$\Lambda_n=-2n\left(B+nI\right)\left(A+B+2nI\right)^{-1}+2(n+1)\left(A+B+(2n+2)I\right)^{-1}\left(B+(n+1)I\right)\tag{4.121}$$

olarak elde edilir. (4.120) ve (4.121) değerleri (4.118) de yerlerine yazılırsa

$$2(n-1)\left(A+B+(2n-1)I\right)^{-1}\left(A+B+2nI\right)^{-1}\left(A+B+(n+1)I\right)\left(B+nI\right)$$
$$=2\Lambda_{n-1}\left(A+B+(2n-1)I\right)^{-1}\left(A+B+2nI\right)^{-1}\left(A+B+nI\right)$$
$$.\left(A+B+(n+1)I\right)\left(B+(n-1)I\right)^{-1}$$
$$-2\left(-2n\left(B+nI\right)\left(A+B+2nI\right)^{-1}+2(n+1)\left(A+B+(2n+2)I\right)^{-1}\left(B+(n+1)I\right)\right)$$
$$.\left(A+B+2nI\right)^{-1}\left(A+B+(n+1)I\right)\left(B+(n-1)I\right)^{-1}\left(B+nI\right)$$
$$+2(n+1)\left(A+B+(n+1)I\right)\left(A+B+(2n+1)I\right)^{-1}\left(A+B+(2n+2)I\right)^{-1}$$
$$.\left(B+(n-1)I\right)^{-1}\left(B+nI\right)\left(B+(n+1)I\right)$$

olup buradan Λ_{n-1} matrisi çekilirse

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_{n-1}\left(A+B+(2n-1)I\right)^{-1}\left(A+B+2nI\right)^{-1}\left(A+B+nI\right)\\
&.\left(A+B+(n+1)I\right)\left(B+(n-1)I\right)^{-1}\\
&=(n-1)\left(A+B+(2n-1)I\right)^{-1}\left(A+B+2nI\right)^{-1}\left(A+B+(n+1)I\right)\left(B+nI\right)\\
&-2n\left(B+nI\right)\left(A+B+2nI\right)^{-1}\left(A+B+2nI\right)^{-1}\left(A+B+(n+1)I\right)\\
&.\left(B+(n-1)I\right)^{-1}\left(B+nI\right)\\
&+2(n+1)\left(A+B+(2n+2)I\right)^{-1}\left(B+(n+1)I\right)\left(A+B+2nI\right)^{-1}\\
&.\left(A+B+(n+1)I\right)\left(B+(n-1)I\right)^{-1}\left(B+nI\right)\\
&-(n+1)\left(A+B+(n+1)I\right)\left(A+B+(2n+1)I\right)^{-1}\left(A+B+(2n+2)I\right)^{-1}\\
&.\left(B+(n-1)I\right)^{-1}\left(B+nI\right)\left(B+(n+1)I\right)
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{n-1} = \; & (n-1)\left(A+B+nI\right)^{-1}\left(B+(n-1)I\right)\left(B+nI\right)\\
&-(n+1)\left(A+B+(2n-1)I\right)\left(A+B+2nI\right)\left(A+B+nI\right)^{-1}\\
&.\left(A+B+(2n+1)I\right)^{-1}\left(A+B+(2n+2)I\right)^{-1}\left(B+nI\right)\left(B+(n+1)I\right)\\
&-2n\left(A+B+(2n-1)I\right)\left(A+B+nI\right)^{-1}\left(A+B+2nI\right)^{-1}\left(B+nI\right)^{2}\\
&+2(n+1)\left(A+B+(2n-1)I\right)\left(A+B+nI\right)^{-1}\\
&.\left(A+B+(2n+2)I\right)^{-1}\left(B+nI\right)\left(B+(n+1)I\right)
\end{aligned}
\tag{4.122}
$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.9 *$A,B\in\mathbb{C}^{r\times r}$ matrisleri için* (4.83) *ve* (4.90) *koşulları sağlansın.* Λ_{n-1}, Λ_n, $\Lambda_{n+1}\in\mathbb{C}^{r\times r}$ *matrisleri sırasıyla* (4.122), (4.121) *ve* (4.120) *ile verilmek üzere,* (4.84) *ile verilen* $P_n^{(A,B)}(x)$ *Jacobi matris polinomları*

$$
\Lambda_{n+1}P_{n+1}^{(A,B)}(x)=\left(xI+\{I-\Lambda_n\}\right)P_n^{(A,B)}(x)-\Lambda_{n-1}P_{n-1}^{(A,B)}(x)\quad,\quad n\geq 1
$$

şeklinde üç terimli bir matris rekürans bağıntısını sağlar (Defez et al. 2004).

5. SONUÇLAR

İlk olarak $F(A,B;C;z)$ hipergeometrik matris fonksiyonunun integral gösterimini ifade eden koşulları biraz daha genişleterek Teorem 3.7 yi aşağıdaki şekilde yeniden verelim.

Teorem 5.1 *$A,B,C\in\mathbb{C}^{r\times r}$ matrisleri için*

$$
\begin{aligned}
&BC = CB\\
&B \text{ ve } C-B \ \text{ pozitif kararlı matrisler}\\
&\forall k\geq 0 \text{ tamsayısı için } C+kI \text{ regüler matris}
\end{aligned}
$$

koşulları sağlanmak üzere $|z|<1$ için

$$F(A,B;C;z) = \left(\int_0^1 (1-tz)^{-A}\, t^{B-I}\, (1-t)^{C-B-I}\, dt\right) \Gamma^{-1}(B)\,\Gamma^{-1}(C-B)\,\Gamma(C)$$

dir.

İspat. Teorem 3.7 nin ispatına benzer şekilde yapılır. ■

Lemma 5.1 *$B,C\in\mathbb{C}^{r\times r}$ matrisleri için*

$$
\begin{aligned}
&BC = CB\\
&B \ \text{ ve } \ C-B \ \text{ pozitif kararlı matrisler}\\
&\forall k\geq 0 \text{ tamsayısı için } C+kI \text{ matrisi regüler}
\end{aligned}
$$

koşulları sağlanmak üzere

$$e^{-t}{}_1F_1(B;C;t) = {}_1F_1(C-B;C;-t)$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat. Lemma 4.4 dikkate alınarak

$$
\begin{aligned}
e^{-t}\,{}_1F_1(B;C;t) &= e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}(B)_k(C)_k^{-1}\frac{t^k}{k!}\\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(B)_k(C)_k^{-1}\frac{t^k}{k!}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(B)_k(C)_k^{-1}\frac{t^n}{(n-k)!k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-nI)_k(B)_k(C)_k^{-1}}{k!}\right)\frac{(-t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Gamma\left(C-B+nI\right)\Gamma^{-1}\left(C-B\right)\Gamma^{-1}\left(C+nI\right)\Gamma\left(C\right)\frac{(-t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(C-B)_n\left(C\right)_n^{-1}\frac{(-t)^n}{n!} \\
&= {}_1F_1\left(C-B;C;-t\right)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. ■

Not: n. dereceden $L_n^{(A,\lambda)}(t)$ Laguerre matris polinomlarının (4.12) ile verilen

$$L_n^{(A,\lambda)}(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\lambda^k}{(n-k)!\,k!}\left(A+I\right)_n\left(A+I\right)_k^{-1}t^k$$

şeklindeki ifadesi,

$$\frac{(-1)^k}{(n-k)!}=\frac{(-n)_k}{n!}\quad \text{ve}\quad (-n)_k\,I=(-nI)_k$$

eşitliklerini kullanarak,

$$L_n^{(A,\lambda)}(t)=\frac{(A+I)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-nI)_k\left(A+I\right)_k^{-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \tag{5.1}$$

şeklinde de gösterilebilir. Ayrıca hipergeometrik matris fonksiyon gösterimi dikkate alındığında ise

$$L_n^{(A,\lambda)}(t)=\frac{(A+I)_n}{n!}\,{}_1F_1\left(-nI;A+I;\lambda t\right)$$

biçimindedir.

Teorem 5.2 λ, $\mathrm{Re}(\lambda)>0$ *olacak şekilde bir kompleks sayı ve* $A\in\mathbb{C}^{r\times r}$,

$$-k\notin\sigma(A)\quad,\quad\forall k\geq 0\ \ \textit{tamsayısı için} \tag{5.2}$$

koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere, n. dereceden $L_n^{(A,\lambda)}(t)$ *Laguerre matris polinomları için*

$$\frac{d}{dt}\left[t^A L_n^{(A,\lambda)}(t)\right]=(A+nI)\;t^{A-I}\;L_n^{(A-I,\lambda)}(t)$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat. (5.1) eşitliğinin her iki yanını t^A ile çarptıktan sonra elde edilen eşitliğin her iki yanının t ye göre türevi alındığında

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[t^A L_n^{(A,\lambda)}(t)\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[t^A \frac{(A+I)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-n)_k\ (A+I)_k^{-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[\sum_{k=0}^{n}\lambda^k(-n)_k(A+I)_n\ (A+I)_k^{-1}\frac{t^{A+kI}}{n!\,k!}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left\{\lambda^k(-n)_k(A+I)_n\ (A+kI)^{-1}(A+(k-1)I)^{-1}...(A+I)^{-1}(A+kI)\frac{t^{A+(k-1)I}}{n!\,k!}\right\} \\
&= t^{A-I}\sum_{k=0}^{n}\left\{\lambda^k(-n)_k A(A+I)...(A+(n-1)I)(A+nI)(A)_k^{-1}\frac{t^k}{n!\,k!}\right\} \\
&= t^{A-I}\sum_{k=0}^{n}\lambda^k(-n)_k(A)_n(A+nI)\ (A)_k^{-1}\frac{t^k}{n!\,k!} \\
&= (A+nI)\,t^{A-I}\frac{((A-I)+I)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-n)_k((A-I)+I)_k^{-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \\
&= (A+nI)t^{A-I}L_n^{(A-I,\lambda)}(t)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.3 λ, $\mathrm{Re}(\lambda)>0$ *olacak şekilde bir kompleks sayı,* $t>0$ *ve* $A\in\mathbb{C}^{r\times r}$, (5.2) *koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere*

$$AL_n^{(A,\lambda)}(t)-\lambda tL_{n-1}^{(A+I,\lambda)}(t)=(A+nI)\ t^{A-I}\ L_n^{(A-I,\lambda)}(t)\quad,\quad n\geq 1$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat. $A\in\mathbb{C}^{r\times r}$, (4.3) koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}L_n^{(A,\lambda)}(t)=-\lambda L_{n-1}^{(A+I,\lambda)}(t)\quad,\quad n\geq 1 \tag{5.3}$$

bağıntısının varlığı daha önceki bölümlerde verilmiştir. $t>0$ için $t^A=\exp(A\ln t)$ olmak üzere, $L_n^{(A,\lambda)}(t)$ yi t^A ile çarptıktan sonra t ye göre türevi alındığında, çarpımın türevi kuralı gereğince

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[t^A L_n^{(A,\lambda)}(t)\right] &= \frac{d}{dt}\left[\exp(A\ln t)\,L_n^{(A,\lambda)}(t)\right] \\
&= A\frac{1}{t}\exp(A\ln t)\,L_n^{(A,\lambda)}(t)+\exp(A\ln t)\,\frac{d}{dt}\left[L_n^{(A,\lambda)}(t)\right]
\end{aligned}$$

yazılır. Lemma 2.13.iv ve (5.3) eşitliği dikkate alınarak bu son eşitlikten

$$\frac{d}{dt}\left[t^{A}L_{n}^{(A,\lambda)}(t)\right]=At^{A-I}L_{n}^{(A,\lambda)}(t)-\lambda t^{A}L_{n-1}^{(A+I,\lambda)}(t)$$

elde edilir. Diğer taraftan Teorem 5.2 den

$$\frac{d}{dt}\left[t^{A}L_{n}^{(A,\lambda)}(t)\right]=(A+nI)\,t^{A-I}\,L_{n}^{(A-I,\lambda)}(t)$$

olup bu sonuçlar birleştirildiğinde

$$AL_{n}^{(A,\lambda)}(t)-\lambda tL_{n-1}^{(A+I,\lambda)}(t)=(A+nI)\,t^{A-I}\,L_{n}^{(A-I,\lambda)}(t)$$

olarak elde edilir.

Böyece ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.4 *$i=0,1,...,s<n$ olmak üzere $A_i\in\mathbb{C}^{r\times r}$ değişmeli matrisleri için*

$$-u\notin\sigma(A_0),\sigma(A_1),...,\sigma(A_s),\sigma(A_0+A_1+I),...,\sigma(A_0+A_1+...+A_s+sI)\ ;\ \forall u\in\mathbb{Z}^{+}$$

koşulları sağlansın. λ, $\mathrm{Re}(\lambda)>0$ olacak şekilde bir kompleks sayı olmak üzere, Laguerre matris polinomları

$$\begin{aligned}L_{n}^{(A_0+A_1+...+A_s+sI,\lambda)}&(t_0+t_1+...+t_s)\\&=\sum_{k_s=0}^{n}\ \sum_{k_{s-1}=0}^{n-k_s}\cdots\sum_{k_2=0}^{n-k_s-...-k_3}\ \sum_{k_1=0}^{n-k_s-...-k_3-k_2}\\&\qquad\times L_{k_s}^{(A_s,\lambda)}(t_s)\,L_{k_{s-1}}^{(A_{s-1},\lambda)}(t_{s-1})...L_{k_1}^{(A_1,\lambda)}(t_1)\ L_{n-k_s-...-k_1}^{(A_0,\lambda)}(t_0)\end{aligned}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. İspatı tümevarımla yapalım.

i) $i=s=0$ için sonuç aşikardır.

ii) $i=s=1$ için

$$L_{n}^{(A_0+A_1+I,\lambda)}(t_0+t_1)=\sum_{k_1=0}^{n}L_{k_1}^{(A_1,\lambda)}(t_1)\,L_{n-k_1}^{(A_0,\lambda)}(t_0)$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

$|w|<1$ için t_0 ve w nın kompleks değerleri için tanımlı olan

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_{n}^{(A_0,\lambda)}(t_0)\ w^{n}=(1-w)^{-(A_0+I)}\exp\left(\frac{-\lambda t_0 w}{1-w}\right)$$

matris doğurucu fonksiyon bağıntısını dikkate alalım. Bundan yararlanarak A_1 matrisi için

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} L_{k_1}^{(A_1,\lambda)}(t_1)\ w^{k_1} = (1-w)^{-(A_1+I)} \exp\left(\frac{-\lambda t_1 w}{1-w}\right)$$

bağıntısı da yazılabilir. Son iki eşitlik taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(A_0,\lambda)}(t_0)\ w^n\right)\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} L_{k_1}^{(A_1,\lambda)}(t_1)\ w^{k_1}\right) &= (1-w)^{-(A_0+I)} \exp\left(\frac{-\lambda t_0 w}{1-w}\right) \\ &\quad \times (1-w)^{-(A_1+I)} \exp\left(\frac{-\lambda t_1 w}{1-w}\right)\end{aligned}$$

olup buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty} L_n^{(A_0,\lambda)}(t_0)\ L_{k_1}^{(A_1,\lambda)}(t_1)\ w^{n+k_1} = (1-w)^{-(A_0+A_1+I)-I} \exp\left(\frac{-\lambda (t_0+t_1) w}{1-w}\right)$$

elde edilir. Ayrıca burada

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} D(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} D(k,n-k)$$

gösteriminden yararlanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{n} L_{n-k_1}^{(A_0,\lambda)}(t_0)\ L_{k_1}^{(A_1,\lambda)}(t_1)\ w^{n} = (1-w)^{-(A_0+A_1+I)-I} \exp\left(\frac{-\lambda (t_0+t_1) w}{1-w}\right)$$

bulunur. Matris doğurucu fonksiyon bağıntısı gözönüne alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(A_0+A_1+I,\lambda)}(t_0+t_1)\, w^n = (1-w)^{-(A_0+A_1+I)-I} \exp\left(\frac{-\lambda (t_0+t_1) w}{1-w}\right)$$

şeklindedir ki, buradan

$$L_n^{(A_0+A_1+I,\lambda)}(t_0+t_1) = \sum_{k_1=0}^{n} L_{k_1}^{(A_1,\lambda)}(t_1)\ L_{n-k_1}^{(A_0,\lambda)}(t_0)$$

bulunur, bu ise ispatı tamamlar.

iii) $i = s-1$ için

$$L_n^{(A_0+A_1+...+A_{s-1}+(s-1)I,\lambda)}\left(t_0+t_1+...+t_{s-1}\right)$$

$$= \sum_{k_{s-1}=0}^{n} \sum_{k_{s-2}=0}^{n-k_{s-1}} ... \sum_{k_2=0}^{n-k_{s-1}-...-k_3} \sum_{k_1=0}^{n-k_{s-1}-...-k_3-k_2}$$

$$\times L_{k_{s-1}}^{(A_{s-1},\lambda)}\left(t_{s-1}\right) L_{k_{s-2}}^{(A_{s-2},\lambda)}\left(t_{s-2}\right) ... L_{k_1}^{(A_1,\lambda)}\left(t_1\right) \; L_{n-k_{s-1}-...-k_1}^{(A_0,\lambda)}\left(t_0\right)$$

eşitliği doğru olsun.

iv) $i = s$ için doğru olduğunu gösterelim.

$|w| < 1$ için t_s ve w nın kompleks değerleri için tanımlı olan

$$\sum_{k_s=0}^{\infty} L_{k_s}^{(A_s,\lambda)}\left(t_s\right) \; w^{k_s} = (1-w)^{-(A_s+I)} \exp\left(\frac{-\lambda t_s w}{1-w}\right)$$

matris doğurucu fonksiyon bağıntısını dikkate alalım. (iii) de doğruluğu kabul edilen eşitlikteki polinoma ait doğurucu fonksiyon bağıntısı ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(A_0+A_1+...+A_{s-1}+(s-1)I,\lambda)}\left(t_0+t_1+...+t_{s-1}\right) w^n$$

$$= (1-w)^{-(A_0+A_1+...+A_{s-1}+(s-1)I)-I} \exp\left(\frac{-\lambda\left(t_0+t_1+...+t_{s-1}\right)w}{1-w}\right)$$

şeklindedir. Bu iki eşitlik taraf tarafa çarpılırsa

$$\left(\sum_{k_s=0}^{\infty} L_{k_s}^{(A_s,\lambda)}\left(t_s\right) \; w^{k_s}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(A_0+A_1+...+A_{s-1}+(s-1)I,\lambda)}\left(t_0+t_1+...+t_{s-1}\right) w^n\right)$$

$$= (1-w)^{-(A_s+I)} \exp\left(\frac{-\lambda t_s w}{1-w}\right) (1-w)^{-(A_0+A_1+...+A_{s-1}+(s-1)I)-I}$$

$$\times \exp\left(\frac{-\lambda\left(t_0+t_1+...+t_{s-1}\right)w}{1-w}\right)$$

olup buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i_{p-1}=0}^{\infty} L_{i_{p-1}}^{(A_p,\lambda)}(t_p)\ L_n^{(A_0+A_1+...+A_{p-1}+(p-1)I,\lambda)}(t_0+t_1+...+t_{p-1})\, w^{n+i_{p-1}}$$

$$=(1-w)^{-(A_0+A_1+...+A_{p-1}+A_p+pI)-I}\exp\left(\frac{-\lambda\,(t_0+t_1+...+t_{p-1}+t_p)\,w}{1-w}\right)$$

elde edilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} D(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} D(k,n-k)$$

gösteriminden yararlanarak bu son eşitlik

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_s=0}^{n} L_{k_s}^{(A_s,\lambda)}(t_s)\ L_{n-k_s}^{(A_0+A_1+...+A_{s-1}+(s-1)I,\lambda)}(t_0+t_1+...+t_{s-1})\, w^{n}$$

$$=(1-w)^{-(A_0+A_1+...+A_s+sI)-I}\exp\left(\frac{-\lambda\,(t_0+t_1+...+t_s)\,w}{1-w}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Doğurucu fonksiyon bağıntısı dikkate alındığında ise

$$L_n^{(A_0+A_1+...+A_s+sI,\lambda)}(t_0+t_1+...+t_s)$$

$$=\sum_{k_s=0}^{n} L_{k_s}^{(A_s,\lambda)}(t_s)\ L_{n-k_s}^{(A_0+A_1+...+A_{s-1}+(s-1)I,\lambda)}(t_0+t_1+...+t_{s-1})$$

elde edilir. (iii) de n yerine $n-k_s$ alınırsa

$$L_{n-k_s}^{(A_0+A_1+...+A_{s-1}+(s-1)I,\lambda)}(t_0+t_1+...+t_{s-1})$$

$$=\sum_{k_{s-1}=0}^{n-k_s}\ \sum_{k_{s-2}=0}^{n-k_s-k_{s-1}}\cdots\sum_{k_2=0}^{n-k_s-k_{s-1}-...-k_3}\ \sum_{k_1=0}^{n-k_s-k_{s-1}-...-k_3-k_2}$$

$$\times L_{k_{s-1}}^{(A_{s-1},\lambda)}(t_{s-1})\, L_{k_{s-2}}^{(A_{s-2},\lambda)}(t_{s-2})\ ...L_{k_1}^{(A_1,\lambda)}(t_1)\ L_{n-k_s-k_{s-1}-...-k_1}^{(A_0,\lambda)}(t_0)$$

olup bu sonuç elde edilen son eşitlikte yazılırsa

$$L_n^{(A_0+A_1+...+A_{s-1}+A_s+sI,\lambda)}\left(t_0+t_1+...+t_s\right)$$

$$=\sum_{k_s=0}^{n}\sum_{k_{s-1}=0}^{n-k_s}\sum_{k_{s-2}=0}^{n-k_s-k_{s-1}}...\sum_{k_2=0}^{n-k_s-k_{s-1}-...-k_3}\sum_{k_1=0}^{n-k_s-k_{s-1}-...-k_3-k_2}L_{k_s}^{(A_s,\lambda)}\left(t_s\right)$$

$$\times L_{k_{s-1}}^{(A_{s-1},\lambda)}\left(t_{s-1}\right)L_{k_{s-2}}^{(A_{s-2},\lambda)}\left(t_{s-2}\right)...L_{k_1}^{(A_1,\lambda)}\left(t_1\right)\ L_{n-k_s-k_{s-1}-...-k_1}^{(A_0,\lambda)}\left(t_0\right)$$

elde edilir ki, bu ise ispatı tamamlar.

Özel Hal: Teorem 5.4 de $A_0=A_1=...=A_s=A$ ve $t_0=t_1=...=t_s=t$ alınırsa

$$-u\notin\sigma\left(A\right),\sigma\left(2A+I\right),\sigma\left(3A+2I\right),...,\sigma\left(\left(s+1\right)A+sI\right)\quad;\quad\forall u\in\mathbb{Z}^+$$

olmak üzere, $s<n$ için

$$L_n^{((s+1)A+sI,\lambda)}\left(\left(s+1\right)t\right)=\sum_{k_s=0}^{n}\sum_{k_{s-1}=0}^{n-k_s}...\sum_{k_2=0}^{n-k_s-...-k_3}\sum_{k_1=0}^{n-k_s-...-k_3-k_2}$$

$$\times L_{k_s}^{(A,\lambda)}\left(t\right)L_{k_{s-1}}^{(A,\lambda)}\left(t\right)...L_{k_1}^{(A,\lambda)}\left(t\right)\ L_{n-k_s-...-k_1}^{(A,\lambda)}\left(t\right)$$

olup $s=1$ için

$$L_n^{(2A+I,\lambda)}\left(2t\right)=\sum_{k_1=0}^{n}L_{k_1}^{(A,\lambda)}\left(t\right)\ L_{n-k_1}^{(A,\lambda)}\left(t\right)$$

ve $s=2$ için

$$L_n^{(3A+2I,\lambda)}\left(3t\right)=\sum_{k_2=0}^{n}\sum_{k_1=0}^{n-k_2}L_{k_2}^{(A,\lambda)}\left(t\right)L_{k_1}^{(A,\lambda)}\left(t\right)L_{n-k_2-k_1}^{(A,\lambda)}\left(t\right)$$

şeklindedir. ■

KAYNAKLAR

Aktaş, R. and Altın, A. 2007. A generating function and some reccurence relations for a family of polynomials. Proceedings of the 12 th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, (December 29-31, 2007), pp. 118–121. Cairo, Egypt.

Altın, A., Aktaş, R. and Erkuş-Duman, E. 2009. On a multivariable extension for the extended Jacobi polynomials. J. Math. Anal. Appl., 353(1); 121–133.

Altın, A. and Erkuş, E. 2006. On a multivariable extension of the Lagrange-Hermite polynomials. Integral Transforms and Spec. Funct., 17(4); 239-244.

Altın, A., Erkuş, E. and Özarslan, M.A. 2006. Families of linear generating functions for polynomials in two variables. Integral Transforms and Spec. Funct., 17(5); 315–320.

Björck, A. and Hammarling, S. 1983. A Schur method for the square root of a matrix. Linear Algebra Appl. 52-53; 127-140.

Chihara, T.S. 1978. An Introduction to Orthogonal Polynomials. Gordon and Breach, New York.

Constantine, A.G. and Muirhead, R.J. 1972. Partial differential equations for hypergeometric functions of two argument matrix. J. Multivariate Anal., 3; 332-338.

Cross, G.W. and Lancaster, P. 1974. Square roots of complex matrices. Linear and Mult. Alg., 1; 289-293.

Defez, E., Hervás, A., Law, A., Villanueva-Oller, J. and Villanueva, R.J. 2000. Progressive transmission of images: PC-based computations, using orthogonal matrix polynomials. Mathl. Comput. Modelling, 32; 1125-1140.

Defez, E., Law, A., Villanueva-Oller, J. and Villanueva, R.J. 2002. Matrix cubic splines for progressive 3D imaging. J. Math. Imag. and Vision, 17; 41-53

Defez, E. and Jódar, L. 2002. Chebyshev matrix polynomials and second order matrix differential equation. Utilitas Mathematica, 61; 107-123.

Defez, E., Jódar, L. and Law, A. 2004. Jacobi matrix differential equation, polynomial solutions and their properties. Computers and Mathematics with Applications, 48; 789-803.

Dunford, N. and Schwartz, J. 1957. Linear Operators, Part I. Interscience, New York.

Golub, G.H. and Van Loan, C.F. 1983, 1989. Matrix Computations. Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland.

Herz, C.S. 1955. Bessel functionss of matrix argument. Ann. of Math., 61; 474-523.

Higham, N.J. 1987. Computing real square roots of a real matrix. Linear Algebra Appl., 88-89; 405-430.

Hille, E. 1969. Lectures on Ordinary Differential Equations. Addison Wesley, New York.

Horn, R.A. and Johnson, C.R. 1993. Matrix Analysis. Cambridge Universty Press.

James, A.T. 1975. Special functions of matrix and single argument in Statistics. In Theory and Applications and Special Functions (Edited by R.A. Askey). pp 497-520. Academic Press.

Jódar, L., Company, R. and Navarro, E. 1994. Bessel matrix functions: explicit solution of coupled Bessel type equations. Utilitas Mathematica, 46; 129-141.

Jódar, L., Company, R. and Navarro, E. 1994. Laguerre matrix polynomials and systems of second-order differential equations. Appl. Numer. Math., 15; 53-63.

Jódar, L., Company, R. and Ponsoda, E. 1995. Orthogonal matrix polynomials and systems of second-order differential equations. Diff. Equations Dynam. Syst., 3(3); 269-288.

Jódar, L. and Cortés J.C. 1998a. On the hypergeometric matrix function. J. Comput. Appl. Math., 99; 205-217.

Jódar, L. and Cortés J.C. 1998b. Some properties of Gamma and Beta matrix functions. Appl. Math. Lett., Vol. 11, No. 1; 89,93.

Jódar, L. and Cortés J.C. 2000. Closed form general solution of the hypergeometric matrix differential equation. Mathl. Comput. Modelling, 32; 1017-1028.

Jódar, L. and Defez, E. 1998. A connection between Laguerre's and Hermite's matrix polynomials. Appl. Math. Lett., 15(1); 13-17.

Jódar, L., Defez, E., and Ponsoda, E. 1995. Matrix quadrature integration and orthogonal matrix polynomials. Congressus Numerantium, 106; 141-153.

Jódar, L., Defez, E., and Ponsoda, E. 1996. Orthogonal matrix polynomials with respect to linear matrix moment functionals: Theory and applications. J. Approx. Theory Appl., 12(1); 96-115.

Jódar, L., Legua, M. and Law, A.G. 1992. A matrix method of Frobenius and applications to generalized Bessel equation. Congressus Numerantium, 86; 7-17.

Jódar, L. and Sastre, J. 1998. On the Laguerre matrix polynomials. Utilitas Mathematica, 53; 37-48.

Keller, H.B. and Wolfe, A.W. 1965. On the nonunique equilibrium states and buckling mechanism of spherical shells. J. Siam, 13; 674-705.

Morse, P.M. and Fesbach, H. 1953. Methods of Theoretical Physics. McGraw-Hill, Tokyo.

Parter, S.V., Stein, M.L. and Stein, P.R. 1973. On the multiplicity of solutions of a differrential equation arising in chemical reactor theory. Tech. Report 194 Department of Computer Science, University of Wisconsin, Madison, WI.

Rainville, E.D. 1973. Special Functions. Chelsea, New York.

Rektorys, K. 1982. The Method of Discretization in Time and Partial Differential Equations. Reidel, Dordrecht, Netherlands.

Szegö, G. 1939. Orthogonal Polynomials. Colloquium publications, American Mathematical Society.

.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Ali ÇEVİK

Doğum Yeri: Silifke

Doğum Tarihi: 10.04.1976

Medeni Hali: Evli ve 2 çocuk babası

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: İçel Anadolu Öğretmen Lisesi (1994)

Lisans: Balıkesir Üniversitesi, Necatibey Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi Bölümü (1998)

Yüksek Lisans: Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2004)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

- Milli Eğitim Bakanlığı, Kayseri ili Sarız ilçesi Kırkısrak İlköğretim Okulu, Matematik Öğretmeni (Eylül 1998 - Mart 1999)
- Mersin Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi (Nisan 1999 - Şubat 2000)
- Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Araştırma Görevlisi (Şubat 2000 - ...)

Yayınları: