F. G. Abdullaev, A. A. Dovgoshey, Szegő theorem, Carathéodory domains, and boundedness of calculating functionals, *Mat. Zametki*, 2005, Volume 77, Issue 1, 3–15

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm2464

Математические заметки

том 77 выпуск 1 январь 2005

УДК 517.53

ТЕОРЕМА СЕГЁ, ОБЛАСТИ КАРАТЕОДОРИ И ОГРАНИЧЕННОСТЬ ВЫЧИСЛЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Ф. Г. Абдуллаев, А. А. Довгошей

Пусть G – ограниченная односвязная область на плоскости, с границей Γ, $z_0 \in G$, ω – гармоническая мера на Γ относительно z_0, μ – конечная борелевская мера с носителем $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq \Gamma$, $\mu_a + \mu_s$ – декомпозиция μ относительно ω, t – положительное действительное число. Решается следующая задача: при какой геометрии области G условие

$$\int \ln\biggl(\frac{d\mu_a}{d\omega}\biggr)\,d\omega = -\infty$$

равносильно полноте полиномов в $L^t(\mu)$ или неограниченности вычисляющего функционала $p \to p(z_0)$, p – полином в $L^t(\mu)$? Исследуется взаимосвязь плотности алгебр рациональных функций в $L^t(\mu)$ и $C(\Gamma)$. При $t = 2$ для конечных борелевских мер с произвольной геометрией носителя найден достаточный признак неограниченности вычисляющего функционала.

Библиография: 22 названия.

1. Введение. Постановка задачи. Пусть K – компактное подмножество плоскости $\mathbb{C}$, $\mathscr{M}$ – семейство всех конечных положительных борелевских мер μ с компактными носителями $S_\mu \subseteq \mathbb{C}$ и $\mathscr{M}(K) := \{\mu \in \mathscr{M} : S_\mu \subseteq K\}$. Обозначим через Π множество всех полиномов от переменной z с коэффициентами из $\mathbb{C}$, а для $z_0 \in \mathbb{C}$ $\Pi_{z_0} := \{p \in \Pi : p(z_0) = 0\}$. При $t > 0$ положим $P^t(\mu)$ – замыкание множества полиномов в $L^t(\mu)$:

$$P^t(\mu) := Cl_{L^t(\mu)}(\Pi),$$

и пусть

$$\mathscr{P}^t(K) := \{\mu \in \mathscr{M}(K) : P^t(\mu) = L^t(\mu)\},$$
$$\mathscr{P}^t(K, z_0) := \{\mu \in \mathscr{M}(K) : P^t(\mu) = Cl_{L^t(\mu)}(\Pi_{z_0})\}.$$

При $K = \mathbb{T} := \{z : |z| = 1\}$ классическая теорема Сегё–Колмогорова–Крейна утверждает, что для любой $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ и любого $t > 0$

$$\inf_{p \in \Pi_0}\biggl(\int |1-p|^t\,d\mu\biggr) = \exp\biggl(\ln\biggl(\frac{d\mu_a}{d\omega}\biggr)\,d\omega\biggr), \tag{1}$$

Работа второго автора выполнена при поддержке The Scientific and Technical Research Counsil of Turkey (TUBITAK NATO PC-B) и ДФФД Украины, грант № 01.07/00241.

где ω – нормированная линейная мера Лебега на $\mathbb{T}$ (совпадающая в этом случае с гармонической мерой относительно точки $z_0 = 0$); μ_a – абсолютно непрерывная составляющая μ в декомпозиции Лебега $\mu = \mu_a + \mu_s$ относительно ω, а $d\mu_a/d\omega$ – производная Радона–Никодима μ_a относительно ω.

Из этой теоремы для любой $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ легко следует эквивалентность следующих утверждений:

- $\displaystyle\int \ln\left(\frac{d\mu_a}{d\omega}\right) d\omega = -\infty$;
- $\mu \in \mathscr{P}(\mathbb{T})$ для любого $t > 0$;
- $\mu \in \mathscr{P}(\mathbb{T}, z_0)$ для любого $t > 0$ и любого z_0 из круга $\{z : |z| < 1\}$.

Пусть G – ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in G$, $\omega = \omega(z_0, G, \cdot\,)$ – гармоническая мера на $\Gamma = \partial G$ относительно z_0. Для каждой меры $\mu \in \mathscr{M}$ имеем разложение $\mu = \mu_a + \mu_s$, где $\mu_a \ll \omega$ – мера μ_a абсолютно непрерывна относительно ω, а $\mu_s \perp \omega$ – меры μ_s и ω взаимно сингулярны. Положим

$$\mathscr{M}^{-}(G, z_0) := \left\{\mu \in \mathscr{M} : \int \ln\left(\frac{d\mu_a}{d\omega}\right) d\omega = -\infty\right\}.$$

Основное содержание данной работы составляет решение следующей задачи. Какую геометрию имеет Γ – граница области G, если для некоторого $z_0 \in G$ выполняется равенство $\mathscr{M}^{-}(G, z_0) \cap \mathscr{M}(\Gamma) = \mathscr{P}^t(\Gamma)$ или $\mathscr{M}^{-}(G, z_0) \cap \mathscr{M}(\Gamma) = \mathscr{P}^t(\Gamma, z_0)$?

Формула (1) была установлена Г. Сегё в [1] для абсолютно непрерывных мер. В общем случае это доказано А. Н. Колмогоровым [2] и М. Г. Крейном [3]. Для любого компакта $K \subseteq \mathbb{C}$ условие $\mu \notin \mathscr{P}^t(K, z_0)$ эквивалентно неравенству

$$\sup\bigl\{|p(z_0)| : p \in \Pi,\ \|p\|_{L^t(\mu)} \leqslant 1\bigr\} < \infty, \tag{2}$$

т.е. ограниченности вычисляющего функционала

$$F\colon \Pi \to \mathbb{C}, \qquad F(p) = p(z_0),$$

по норме пространства $L^t(\mu)$ (см., например, лемму 7 настоящей работы).

Точка z_0 называется BPE[1] *точкой* для полиномов в $L^t(\mu)$, если выполнено неравенство (2). С результатами исследований множества BPE точек, связанных с полиномиальной аппроксимацией в $L^t(\mu)$, и обобщениями теоремы Сегё, можно познакомиться по работам Д. Томсона [4], [5], Д. Акеройда [6], [7], Д. Акеройда и Э. Салиби [8], [9]. Например, в [8], [9] исследуется зависимость множества BPE от t. Случай $t = 2$ изложен в монографии Д. Конвея [10]. Из более ранних работ этого направления отметим статьи А. Вольберга [11] и Т. Трента [12]. В настоящей работе используется вариант теоремы Сегё для алгебр Дирихле (см., например, [13]), восходящей к Г. Хельсону и Д. Лауденслегеру [14].

[1] BPE – сокращение английского термина bounded point evaluation.

2. Формулировка основных результатов. Пусть G – односвязная ограниченная область с границей Γ. Всюду далее $\{G_i : i \in I\}$ – множество ограниченных компонент связности открытого множества $\mathbb{C}\setminus\Gamma$, а $\{z_i : i \in I\}$ – множество точек такое, что $z_i \in G_i$ при любом $i \in I$. Напомним, что область G называется *областью Каратеодори*, если $\Gamma = \partial G_\infty$, где G_∞ – неограниченная компонента связности множества $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$.

Замечание 1. Если G – область Каратеодори, то используя равенства (3), (4) из теоремы 1, сформулированной ниже, можно показать, что

$$\mathscr{P}^t(\Gamma) = \bigcap_{i\in I} \mathscr{P}^{t_i}(\Gamma, z_i),$$

где $t_i > 0$ при $i \in I$.

Под *гармонической мерой* $\omega(z_0, G, \cdot)$ в дальнейшем понимается представляющая мера непрерывного функционала

$$\varphi_{z_0}\colon C(\Gamma) \to \mathbb{C}, \qquad \varphi_{z_0}(f) = \tilde{f}(z_0),$$

где $C(\Gamma)$ – алгебра непрерывных комплексно-значных функций на Γ с нормой

$$\|f\| = \sup\{|f(z)| : z \in \Gamma\},$$

а для любой $f \in C(\Gamma)$ $\tilde{f}$ – гармоническая в G и непрерывная в $\overline{G}$ функция, для которой $\tilde{f}|_\Gamma = f$.

Теорема 1. *Пусть G – произвольная ограниченная односвязная область, $z_0 \in G$ и $0 < t < \infty$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(a) *Если G – область Каратеодори, то имеют место равенства*

$$\mathscr{M}(\Gamma) \cap \mathscr{M}^-(G, z_0) = \mathscr{P}^t(\Gamma, z_0), \tag{3}$$

$$\mathscr{P}^t(\Gamma) = \bigcap_{i\in I} \mathscr{M}^-(G_i, z_i) \cap \mathscr{M}(\Gamma). \tag{4}$$

(b) *Если выполнено (3), то G – область Каратеодори.*

(c) *G – область Каратеодори и $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ связно тогда и только тогда, когда*

$$\mathscr{M}(\Gamma) \cap \mathscr{M}^-(G, z_0) = \mathscr{P}^t(\Gamma) = \mathscr{P}^t(\Gamma, z_0). \tag{5}$$

(d) *Если G – не является областью Каратеодори, то*

$$(\mathscr{M}(\Gamma) \cap \mathscr{M}^-(G, z_0)) \setminus \mathscr{P}^t(\Gamma, z_0) \neq \varnothing. \tag{6}$$

Замечание 2. Так как $\mathscr{P}^t(\Gamma) \subseteq \mathscr{P}^t(\Gamma, z_0)$, то для односвязных ограниченных областей G, не являющихся областями Каратеодори,

$$(\mathscr{M}(\Gamma) \cap \mathscr{M}^-(G, z_0)) \setminus \mathscr{P}^t(\Gamma) \neq \varnothing.$$

Пусть K – компактное подмножество комплексной плоскости. Рассмотрим семейство $\mathfrak{U}_r(K)$ всех подалгебр A алгебры $C(K)$ таких, что

- любой полином $p \in A$;
- любой элемент $r \in A$ есть рациональная функция с полюсами вне K.

Если $\mu \in \mathscr{M}(K)$ достаточно "массивна", то можно ожидать, что из плотности A в $L^t(\mu)$ следует плотность A в $C(K)$. Каков критерий этой массивности? Для односвязной области G с границей Γ рассмотрим подмножество $\mathscr{M}^t_*(\Gamma) \subseteq \mathscr{M}(\Gamma)$ мер таких, что $\forall A \in \mathfrak{U}_r(\Gamma)$ из плотности A в $L^t(\mu)$ следует плотность A в $C(\Gamma)$. Положим

$$\mathscr{M}^+(\Gamma, z_0) := \mathscr{M} \setminus \mathscr{M}^-(G, z_0) = \left\{\mu \in \mathscr{M} : \int \ln\left(\frac{d\mu_a}{d\omega}\right) d\omega > -\infty\right\}.$$

В следующей теореме использованы обозначения теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть G – односвязная ограниченная область, $0 < t < \infty$. Тогда если G – область Каратеодори, то*

$$\mathscr{M}^t_*(\Gamma) = \bigcap_{i \in I} (\mathscr{M}^+(G_i, z_i) \cap \mathscr{M}(\Gamma)), \tag{7}$$

а если G – произвольная односвязная область и $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ связно, то равенство

$$\mathscr{M}^t_*(\Gamma) = \mathscr{M}^+(G, z_0) \cap \mathscr{M}(\Gamma) \tag{8}$$

выполняется тогда и только тогда, когда G – область Каратеодори.

Если носитель меры μ не лежит на границе полиномиально-выпуклого компакта, то достаточно полный аналог теоремы Сегё не найден, хотя получен ряд интересных результатов (см. работы [4]–[12]). В этом случае определенный интерес представляют условия, достаточные для $P^t(\mu) = Cl_{L^t(\mu)}(\Pi_{z_0})$. Одно их таких условий сформулированно ниже для $t = 2$.

Пусть μ – произвольная конечная борелевская мера с компактным носителем S_μ, $\operatorname{card}(S_\mu) = \infty$. Обозначим через $\alpha_n = \alpha_n(\mu)$ старший положительный коэффициент n-го ортонормированного полинома $p_n(\mu;\,\cdot\,)$, соответствующего мере μ,

$$\int p_n(\mu;\,\cdot\,)\overline{p_m(\mu;\,\cdot\,)}\, d\mu = \begin{cases} 1, & \text{при } n = m, \\ 0, & \text{при } n \neq m, \end{cases}$$

$$\deg(p_n(\mu;\,\cdot\,)) = n, \qquad p_n(\mu; z) = \alpha_n z^n + \cdots .$$

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что*

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^{1/n} < \operatorname{cap}(\operatorname{Int}\widehat{S}_\mu), \tag{9}$$

где $\widehat{S}_\mu$ *– полиномиально выпуклая оболочка* S_μ, $\operatorname{Int}\widehat{S}_\mu$ *– множество внутренних точек* $\widehat{S}_\mu$, *а* $\operatorname{cap}(\operatorname{Int}\widehat{S}_\mu)$ *– логарифмическая емкость* $\operatorname{Int}\widehat{S}_\mu$. *Тогда существует точка* $z_0 \in \operatorname{Int}\widehat{S}_\mu$ *такая, что*

$$1 \in Cl_{L^2(\mu)}(\Pi_{z_0}). \tag{10}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Предположим, что*

$$\operatorname{cap}(S_\mu) = \operatorname{cap}(\operatorname{Int}\widehat{S}_\mu). \tag{11}$$

Тогда если мера μ *не является регулярной, то найдется точка* $z_0 \in \operatorname{Int}\widehat{S}_\mu$, *для которой выполняется* (10).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Регулярность меры μ в следствии 1 понимается в соответствии с [15] как регулярность асимптотического поведения $\frac{1}{n}\ln|p_n(\mu;z)|$ при $n\to\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Знак “$<$” в (9) нельзя заменить знаком “$\leqslant$”. Тривиальный контрпример дает двумерная мера Лебега m_2 на единичном круге $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$. Регулярность в этом случае очевидна,

$$\operatorname{cap}(\mathbb{D}) = \lim_{n\to\infty}\operatorname{cap}\left\{z : |z| \leqslant 1 - \frac{1}{n}\right\} = 1 = \operatorname{cap}(\overline{\mathbb{D}}),$$

но любая точка $\lambda \in \mathbb{D}$ является BPE точкой.

3. Доказательства и леммы. Пусть B – алгебра Дирихле на компакте $K \subset \mathbb{C}$, $\mu \in \mathscr{M}(K)$, ν – представляющая мера мультипликативного линейного функционала $\varphi\colon B \to \mathbb{C}$, $B_0 := \{f \in B : \varphi(f) = 0\}$ – ядро функционала φ. Формула (1) в этом случае имеет вид (см., например, [13, гл. IV, теорема 4.3.3])

$$\inf_{f\in B_0}\int|1-f|^t\,d\mu = \exp\int\ln\left(\frac{d\mu_a}{d\nu}\right)d\nu, \tag{12}$$

где μ_a – абсолютно непрерывная составляющая μ относительно ν, а t – произвольное положительное число.

Для того, чтобы использовать (12) при доказательстве теоремы 1, рассмотрим на Γ алгебры $C(\Gamma)$, $P(\Gamma)$ и $C_R(\Gamma)$, где $P(\Gamma)$ – замыкание множества полиномов Π в $C(\Gamma)$ и $C_R(\Gamma)$ – вещественно-значные непрерывные функции на Γ.

ЛЕММА 1. *Пусть* G *– произвольная область Каратеодори с границей* Γ. *Тогда*

(i) $P(\Gamma)$ *– алгебра Дирихле на* Γ, *т.е.* $\operatorname{Re}(P(\Gamma))$ *всюду плотно в* $C_R(\Gamma)$;

(ii) *функционал* $\varphi_{z_0}\colon P(\Gamma)\to\mathbb{C}$, $\varphi_{z_0}(f) = \tilde{f}(z_0)$, *мультипликативен на* $P(\Gamma)$;

(iii) *ядро функционала* φ_{z_0} *является замыканием множества* Π_{z_0} *в* $C(\Gamma)$.

Доказательство. (i) следует из определения области Каратеодори и теоремы Уолша–Лебега (см., например, [16, гл. II, теорема 3.3]).

(iii) есть частный случай теоремы Уолша о равномерной аппроксимации при наличии интерполяционных ограничений [17, гл. VI, теорема 6.5.1].

Проверим (ii). Если $f_1, f_2 \in P(\Gamma)$, то найдутся Φ_1, Φ_2, голоморфные в G и непрерывные в $\overline{G}$, причем

$$\Phi_i|_\Gamma = f_i, \quad i = 1, 2, \qquad \text{и} \qquad \Phi_1 \cdot \Phi_2|_\Gamma = f_1 \cdot f_2.$$

В силу единственности решения задачи Дирихле

$$\varphi_{z_0}(f_i) = \Phi_i(z_0), \quad i = 1, 2 \qquad \text{и} \qquad \varphi_{z_0}(f_1 \cdot f_2) = \Phi_1(z_0) \cdot \Phi_2(z_0).$$

Следовательно, $\varphi_{z_0}(f_1 \cdot f_2) = \varphi_{z_0}(f_1) \cdot \varphi_{z_0}(f_2)$.

Следующие леммы достаточно хорошо известны.

Лемма 2. *Пусть G – произвольная область Каратеодори с границей Γ, $\{G_i : i \in I\}$ – множество ограниченных компонент связности открытого множества $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Тогда каждая из областей G_i, $i \in I$, есть область Каратеодори.*

Лемма 3. *Пусть G – ограниченная односвязная область с границей Γ, $z_0 \in G$, $\omega = \omega(z_0, G, \cdot\,)$. Тогда* $\operatorname{supp}(\omega) = \Gamma$.

Лемма 4. *Пусть G – область Каратеодори, $\overline{G}$ разбивает плоскость, $\omega_1 = \omega(G_1, z_1, \cdot\,)$ и $\omega_2 = \omega(G_2, z_2, \cdot\,)$ – гармонические меры, соответствующие различным ограниченным компонентам связности $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Тогда $\omega_1 \perp \omega_2$.*

Замечание 5. Из леммы 2 следует, что заменив в лемме 1 z_0 на произвольное $z_i \in G_i$, $i \in I$, получим (i)–(iii) для $\varphi_{z_i} \colon P(\Gamma) \to \mathbb{C}$, $\varphi_{z_i}(f) = \tilde{f}(z_i)$, где $\tilde{f}$ – гармоническое продолжение $f|_{\partial G_i}$ в $\overline{G}_i$.

Доказательство теоремы 1. a) Пусть G – область Каратеодори и $\mu \in \mathscr{M}(\Gamma)$. Заменяя в (12) ν на $\omega = \omega(z_0, G, \cdot\,)$ и учитывая, что в силу пункта (iii) леммы 1

$$\inf_{f \in B_0} \int |1 - f|^t \, d\mu = \inf_{p \in \Pi_{z_0}} \int |1 - p|^t \, d\mu, \tag{13}$$

видим, что выполнено (13).

Проверим (4). Пусть $\mu \in \mathscr{P}^t(\Gamma)$. Тогда при любом $i \in I$ функция $(z - z_i)^{-1}$ принадлежит $P^t(\mu)$. Пусть $\{p_n\}$ – последовательность полиномов, сходящаяся к $(z - z_i)^{-1}$ в $L^t(\mu)$. Так как для любого $p \in \Pi$

$$\begin{aligned}(d_{1i})^{-t} \int |1 - (z - z_i)p(z)|^t \, d\mu(z) &\leqslant \int \left| \frac{1}{z - z_i} - p(z) \right|^t d\mu(z) \\ &\leqslant (d_{2i})^{-t} \int |1 - (z - z_i)p(z)|^t \, d\mu(z),\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$d_{1i} = \max\{|z - z_i| : z \in \Gamma\}, \qquad d_{2i} = \min\{|z - z_i| : z \in \Gamma\},$$

то $(z-z_i)p_n(z) \to 1$ в $L^t(\mu)$. Следовательно, из леммы 2 и равенства 3

$$(\mu \in \mathscr{P}^t(\Gamma)) \implies \Bigl(\mu \in \bigcap_{i \in I} \mathscr{M}^-(G_i, z_i)\Bigr).$$

Пусть $S_\mu \subseteq \Gamma$ и $\mu \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{M}^-(G_i, z_i)$. Так как $C(\Gamma)$ плотно в $L^t(\mu)$, а из теоремы Витушкина следует, что любая $f \in C(\Gamma)$ равномерно приближается на Γ рациональными функциями (см., например, [18, гл. II, § 5, теорема 2]), достаточно показать, что любая рациональная $r(z)$ с полюсами вне Γ аппроксимируется в $L^t(\mu)$ полиномами. Легко видеть, что произвольная рациональная функция с полюсами вне Γ равномерно аппроксимируется на Γ рациональными функциями с простыми полюсами. Пусть

$$r(z) = (z-b)^{-1}, \qquad b \notin \Gamma.$$

Если $b \in G_\infty$, то по теореме Мергеляна $r(z)$ равномерно аппроксимируется полиномами на $\mathbb{C} \setminus G_\infty$, а следовательно, и на Γ. В противном случае $b \in G_i$ при некотором $i \in I$. Заменив в (14) z_i на b, видим, что достаточно установить $1 \in Cl_{L^t(\mu)}(\Pi_b)$. По лемме 2 G_i – область Каратеодори, а из замечания 5 и формулы (12)

$$(1 \in Cl_{L^t(\mu)}(\Pi_b)) \iff \biggl(\int \biggl(\frac{d\mu_a^b}{d\omega^b}\biggr)\, d\omega^b = -\infty\biggr),$$

где $\omega^b = \omega(b, G_i, \cdot\,)$, μ_a^b – абсолютно непрерывная составляющая μ относительно ω^b. Хорошо известно, что меры ω^b и $\omega = \omega(z_i, G_i, \cdot\,)$ взаимно абсолютно непрерывны, и для некоторой положительной постоянной $c = c(b, z_i, G_i)$

$$\frac{1}{c} \leqslant \frac{d\omega^b}{d\omega}(z) \leqslant c \tag{15}$$

для почти всех $z \in \partial G_i$. Взаимная абсолютная непрерывность ω и ω^b даст равенство $\mu_a^b = \mu_a$, а (15) и правила вычисления производной Радона–Никодима приводят к эквивалентности

$$(\mu \in \mathscr{M}^-(G_i, z_i)) \iff (\mu \in \mathscr{M}^-(G_i, b)).$$

d) Предположим, что G не является областью Каратеодори. Пусть $\widehat{G}$ – полиномиально-выпуклая оболочка множества $\overline{G}$. Обозначим через Ω компоненту связности множества $\operatorname{Int} \widehat{G}$, содержащую z_0. Тогда $\Omega \supset G$, $\partial\Omega \subset \Gamma$ и Ω является областью Каратеодори. Пусть $\widehat{\omega} := \omega(z_0, \Omega, \cdot\,)$ – гармоническая мера на $\partial\Omega$ относительно z_0. Достаточно показать, что $\widehat{\omega} \in \mathscr{M}^-(G, z_0) \setminus \mathscr{P}^t(\Gamma, z_0)$. В силу леммы 3 $\operatorname{supp}(\widehat{\omega}) = \partial\Omega$; следовательно, ω п.в. на $\Gamma \setminus \partial\Omega$

$$\frac{d\widehat{\omega}_a}{d\omega}(z) = 0.$$

Кроме того, по условию G не является областью Каратеодори; следовательно, $\Gamma \setminus \partial\Omega \neq \varnothing$. По определению носителя меры и в силу леммы 3 $\omega(\Gamma \setminus \partial\Omega) > 0$. Следовательно,

$$\int_\Gamma \ln\biggl(\frac{d\widehat{\omega}_a}{d\omega}\biggr)\, d\omega = \int_{\Gamma\setminus\partial\Omega} \ln\biggl(\frac{d\widehat{\omega}_a}{d\omega}\biggr)\, d\omega + \int_{\partial\Omega} \ln\biggl(\frac{d\widehat{\omega}_a}{d\omega}\biggr)\, d\omega = -\infty, \tag{16}$$

т.е. $\widehat{\omega} \in \mathscr{M}^-(G, z_0)$. Покажем, что $\widehat{\omega} \notin \mathscr{P}^t(\Gamma, z_0)$. Так как $\operatorname{supp}(\widehat{\omega}) = \partial\Omega \subseteq \Gamma$, достаточно проверить $\widehat{\omega} \notin \mathscr{P}^t(\partial\Omega, z_0)$. Так как Ω – область Каратеодори, из (3) имеем

$$(\widehat{\omega} \notin \mathscr{P}^t(\partial\Omega, z_0)) \iff (\widehat{\omega} \notin \mathscr{M}^-(\Omega, z_0) \vee \widehat{\omega} \notin \mathscr{M}(\partial\Omega)).$$

Так как

$$\int \ln\left(\frac{d\widehat{\omega}}{d\widehat{\omega}}\right) d\widehat{\omega} = 0 \neq -\infty,$$

очевидно, $\widehat{\omega} \notin \mathscr{M}^-(\Omega, z_0)$.

b) Утверждения (a) и (d) показывают, что (3) выполнено тогда и только тогда, когда G – область Каратеодори.

c) Если G – область Каратеодори и $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ связно, то (5) следует из утверждения (a). Обратно, пусть выполнено (5). Тогда, используя (b), видим, что G – область Каратеодори и нужно показать, что $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ связно. В силу (4) из (5) получаем, что

$$\forall i \in I: \quad \mathscr{M}^-(G, z_0) \cap \mathscr{M}(\Gamma) \subseteq \mathscr{M}^-(G_i, z_i) \cap \mathscr{M}(\Gamma). \tag{17}$$

Если при некотором $i \in I$ имеем $G_i \neq G$, то $\omega(G_i, z_i, \cdot\,) \notin \mathscr{M}^-(G_i, z_i)$, но, в силу (13) и лемм 4, 3 $\omega(G_i, z_i, \cdot\,) \in \mathscr{M}^-(G_i, z_i) \cap \mathscr{M}(\Gamma)$, что противоречит (17). Теорема 1 доказана полностью.

Замечание 6. Рассуждения, использованные при доказательстве части a) теоремы 1, стандартны. Плотность $C(\Gamma)$ в $L^t(\mu)$ обычно доказывается для регулярных μ и $1 \leqslant t < \infty$. Требование регулярности μ не включено в определение $\mathscr{M}$, так как любая конечная мера, определенная на борелевских подмножествах из $\mathbb{R}^n$, регулярна [19, гл. I, утверждение 1.5]. Плотность $C(\Gamma)$ в $L^t(\mu)$ при $0 < t < 1$ легко установить, использовав неравенство Гёльдера.

Перейдем к подготовке доказательства теоремы 2. Для каждой рациональной функции r через $\operatorname{Pol}(r)$ будем обозначать множество полюсов этой функции.

Пусть K – произвольный компакт из $\mathbb{C}$ (может быть пустой). Сопоставим каждой алгебре $A \in \mathfrak{U}_r(K)$ подмножество

$$\operatorname{Pol}(A) := \bigcup_{r \in A} \operatorname{Pol}(r); \tag{18}$$

очевидно, $\operatorname{Pol}(A) \subseteq \mathbb{C} \setminus K$. Пусть $\mathscr{B}(\mathbb{C} \setminus K)$ – множество всех подмножеств $\mathbb{C} \setminus K$.

Лемма 5. *Отображение* $\operatorname{Pol}\colon \mathfrak{U}_r(K) \to \mathscr{B}(\mathbb{C} \setminus K)$, *определяемое правилом* (18), *является биективным.*

Доказательство. Пусть $B \subseteq \mathbb{C} \setminus K$. Легко видеть, что множество $A(B)$ рациональных функций r, для которых $\operatorname{Pol}(r) \subseteq B$, не пусто (если $B = \varnothing$, то $A(B) = \Pi$), $A(B)$ – алгебра из $\mathfrak{U}_r(K)$ и $\operatorname{Pol}(A(B)) = B$. Следовательно, отображение Pol – сюръекция. Проверим инъективность. Если для некоторого $A \in \mathfrak{U}_r(K)$ имеем $\operatorname{Pol}(A) = B$, то, очевидно, $A \subseteq A(B)$. Докажем, что $A(B) \subseteq A$. Так как алгебра $A(B)$ порождается функциями вида $(z-b)^{-1}$, где $b \in B$, достаточно проверить, что

$$\forall b \in B: \quad (z-b)^{-1} \in A.$$

Выберем $r \in A$ так, что $b \in \mathrm{Pol}(r)$. Используя теорему о разложении рациональной функции на простейшие дроби, легко построить такие полиномы p_1 и p_2, для которых

$$\frac{1}{(z-b)} = p_1(z)r(z) + p_2(z).$$

Следовательно, $(z-b)^{-1} \in A$.

Доказательство теоремы 2. Пусть G – область Каратеодори. Проверим (7). Предположим, что при некотором $i_0 \in I$ найдется мера

$$\mu_0 \in \mathscr{M}_*^t(\Gamma) \setminus \mathscr{M}^+(G_{i_0}, z_{i_0}).$$

Рассмотрим алгебру

$$A_{i_0} := \mathrm{Pol}^{-1}\Bigl(\bigcup_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} G_i\Bigr),$$

где Pol^{-1} – отображение, обратное к Pol. Мера $\mu_0 \in \mathscr{M}^-(G_{i_0}, z_{i_0}) \cap \mathscr{M}(\Gamma)$ и, рассуждая так же, как при доказательстве части а) теоремы 1, видим, что

$$\forall b \in G_{i_0}: \quad (z-b)^{-1} \in L^t(\mu_0).$$

Следовательно, A_{i_0} плотна в $L^t(\mu_0)$. Однако A_{i_0} не плотна в $C(\Gamma)$. Действительно, так как $\Gamma_{i_0} := \partial G_{i_0} \subseteq \partial G = \Gamma$, из плотности A_{i_0} в $C(\Gamma)$ следует плотность A_{i_0} в $C(\Gamma_{i_0})$. В частности, найдется последовательность $\{r_n\}$, $r_n \in A_{i_0}$, для которой $r_n(z) \rightrightarrows (z-z_{i_0})^{-1}$ равномерно на Γ_{i_0}; следовательно, $(z-z_{i_0})r_n(z) \rightrightarrows 1$ равномерно на Γ_{i_0}. Тогда

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_{i_0}} (z-z_{i_0}) r_n(z)\, d\omega(z_{i_0}, G_{i_0}, z) = \int_{\Gamma_{i_0}} 1\, d\omega(z_{i_0}, G_{i_0}, z) = 1. \tag{19}$$

Полученное противоречие показывает, что

$$\mathscr{M}_*^+(\Gamma) \subseteq \Bigl(\bigcap_{i\in I} \mathscr{M}^+(G_i, z_i)\Bigr) \cap \mathscr{M}(\Gamma).$$

Докажем обратное включение. Предположим, что

$$\mu \in \Bigl(\bigcap_{i\in I} \mathscr{M}^+(G_i, z_i)\Bigr) \cap \mathscr{M}(\Gamma) \tag{20}$$

и A_1 – произвольная алгебра, принадлежащая $\mathfrak{U}_r(\Gamma)$ и плотная в $L^t(\mu)$, $t > 0$. Достаточно убедиться в том, что A_1 плотна в $C(\Gamma)$. Пусть $A_1 = \mathrm{Pol}^{-1}(B_1)$, где $B_1 \subseteq \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Для полноты A_1 в $C(\Gamma)$ достаточно (и необходимо), чтобы

$$\forall i \in I: \quad G_i \cap B_1 \neq \varnothing. \tag{21}$$

Если последнее ложно, то найдется i_0 такое, что $(z-z_{i_0})^{-1}$ (где $z_{i_0} \in G_{i_0}$) приближается в $L^t(\mu)$ последовательностью $\{r_n\}$, r_n – рациональные функции с полюсами вне $\overline{G}_{i_0}$. Тогда $r_n(z)(z-z_{i_0}) \to 1$ в $L^t(\mu)$. С другой стороны, так как G_{i_0} – область Каратеодори, использовав (20) и (12), при $\nu = \omega(z_{i_0}, G_{i_0}, \cdot\,)$ видим, что

$$\int |1 - r_n(z)(z - z_{i_0})|^t \, d\mu(z) \geqslant c > 0,$$

где $c > 0$ не зависит от n. Получили противоречие. Равенство (7) доказано.

Пусть G – ограниченная односвязная область и $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ связно. Если G – область Каратеодори, то (7) $\Longrightarrow$ (8). Если G не является областью Каратеодори, то, как и при доказательстве пункта d) теоремы 1, перейдем к области Ω. Мера $\widehat{\omega} = \omega(z_0, \Omega, \cdot\,)$ не принадлежит $\mathscr{M}^+(G, z_0) \cap \mathscr{M}(\Gamma)$ (см. формулу (16)). Проверим, что $\widehat{\omega} \in \mathscr{M}^t_*(\Gamma)$. Пусть при некотором $B_1 \subseteq \mathbb{C} \setminus \Gamma$ алгебра $A_1 := \mathrm{Pol}^{-1}(B_1)$ плотна в $L^t(\widehat{\omega})$, $t > 0$. Повторяя рассуждения, приведенные в первой части настоящей теоремы после (21) (заменив z_{i_0} на z_0, G_{i_0} на Ω, а обе меры μ и $\omega(z_{i_0}, G_{i_0}, \cdot\,)$ на $\widehat{\omega}$), убеждаемся в том, что $G \cap B_1 \neq \varnothing$. Следовательно, A_1 плотна в $C(\Gamma)$, т.е. из (8) следует, что G – область Каратеодори.

Перед доказательством теоремы 3 напомним необходимые сведения.

Определение. Следуя [15], будем говорить, что мера $\mu \in \mathscr{M}$, $\operatorname{card} S_\mu = \infty$, является регулярной, если

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n)^{1/n} = \frac{1}{\operatorname{cap} S_\mu}, \tag{22}$$

где $\alpha_n > 0$ – старший коэффициент $p_n(\mu, \cdot\,)$, а $\operatorname{cap} S_\mu$ – логарифмическая емкость S_μ.

Замечание 7. Логарифмическая емкость любого ограниченного борелевского множества B понимается как его внутренняя емкость

$$\operatorname{cap} B := \sup\{\operatorname{cap} K : K \text{ – компакт, } K \subseteq B\}.$$

При доказательстве теоремы 3 используем следующее свойство логарифмической емкости (см. [20]). Пусть K_n – компакты, $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subseteq K_{n+1} \subseteq B$ – ограниченное борелевское множество; тогда

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{cap}(K_n) = \operatorname{cap}\biggl(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\biggr). \tag{23}$$

Положим при $n \in \mathbb{N}$ $\Pi_n := \{p \in \Pi : \deg p \leqslant n\}$.

Лемма 6. *Пусть $\mu \in \mathscr{M}$ и $\operatorname{card}(S_\mu) = \infty$. Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$, $p \in \Pi_n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет место неравенство*

$$|p(\lambda)| \leqslant \biggl(\sum_{j=0}^{n} |p_j(\mu;\lambda)|^2\biggr)^{1/2} \|p\|_{L^2(\mu)}. \tag{24}$$

Доказательство. Функция

$$Q_n(\lambda; w) = \sum_{k=0}^{n} \overline{p_k(\mu; \lambda)} p_k(\mu; w)$$

– воспроизводящее ядро пространства $(\Pi_n, \|\cdot\|_{L^2(\mu)})$ и

$$\|Q_n(\lambda, \cdot)\|_{L^2(\mu)} = \left(\sum_{j=0}^{n} |p_j(\mu; \lambda)|^2\right)^{1/2}. \tag{25}$$

Применив неравенство Шварца к правой части формулы $p(\lambda) = \langle p, Q(\lambda, \cdot)\rangle$, получаем (24).

Лемма 7. *Для любой меры $\mu \in \mathscr{M}$, точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и $t > 0$ следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *точка z_0 является* BPE *точкой для полиномов в $L^t(\mu)$, т.е. выполнено* (2);
(ii) $1 \notin Cl_{L^t(\mu)}(\Pi_{z_0})$.

Доказательство. (ii) не выполнено тогда и только тогда, когда Π_{z_0} – ядро вычисляющего функционала

$$F\colon \Pi \to \mathbb{C}, \qquad F(p) = p(z_0),$$

будет плотным подмножеством пространства $(\Pi, \|\cdot\|_{L^t(\mu)})$. Как известно [21, гл. 1, теорема 1.18], для любого линейного топологического пространства ядро линейного функционала плотно тогда и только тогда, когда этот функционал не ограничен.

Лемма 8. *Пусть выполнены условия леммы* 7, $\operatorname{card}(S_\mu) = \infty$ *и* $t = 2$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) z_0 – BPE *точка для полиномов в* $L^2(\mu)$,
(ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} |p_i(\mu; z_0)|^2 < \infty$.

Доказательство. Как следует из (25), норма линейного функционала

$$F\colon (\Pi_n, \|\cdot\|_{L^2(\mu)}) \to \mathbb{C}, \qquad F(p) = p(z_0),$$

равна

$$\left(\sum_{i=0}^{n} |p_i(\mu; z_0)|^2\right)^{1/2}.$$

При $n \to \infty$ видим, что (ii) эквивалентно ограниченности вычисляющего функционала для полиномов в $L^2(\mu)$.

Доказательство теоремы 3. Достаточно проверить, что

$$(\forall\lambda\in \operatorname{Int}\widehat{S}_\mu : \lambda - \text{ВРЕ для } \mu) \implies \left(\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^n \geqslant \operatorname{cap}(\operatorname{Int}\widehat{S}_\mu)\right). \tag{26}$$

Предположим, что посылка этой импликации верна. Пусть $\beta_n^2(\lambda) := \sum_{j=0}^n |p_j(\mu;\lambda)|^2$. Тогда $\{\beta_n^2(\lambda)\}_{n=0}^\infty$ – монотонно возрастающая последовательность непрерывных функций. Следовательно, $\beta^2(\lambda) := \lim_{n\to\infty}\beta_n^2(\lambda)$ – функция, полунепрерывная снизу (см., например, [22, гл. 1, теорема 1.3]), и при любом $m\in\mathbb{N}$

$$E_m := \{z\in \operatorname{Int}\widehat{S}_\mu : \beta^2(\lambda)\leqslant m\}$$

– замкнутое подмножество $\operatorname{Int}\widehat{S}_\mu$. Пусть $\{C_m\}_{m=1}^\infty$ – компактное исчерпание $\operatorname{Int}\widehat{S}_\mu$, т.е. C_m – компакты такие, что

$$C_m\subseteq C_{m+1},\qquad \operatorname{Int}\widehat{S}_\mu = \bigcup_{m=1}^\infty C_m.$$

Положим при $m\in\mathbb{N}$ $K_m := C_m\cap E_m$. Из леммы 8 следует, что $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ – компактное исчерпание $\operatorname{Int}\widehat{S}_\mu$ и, очевидно,

$$\forall z\in K_m:\quad \beta^2(z)\leqslant m.$$

Из (24) следует, что

$$\forall p\in\Pi:\quad \|p\|_{K_m}\leqslant\sqrt{m}\|p\|_{L^2(\mu)},$$

где

$$\|p\|_{K_m} = \operatorname{supp}\{|p(z)| : z\in K_m\}.$$

В частности,

$$\left\|\frac{p_n(\mu;\,\cdot\,)}{\alpha_n}\right\|_{K_m}\leqslant\sqrt{m}\left\|\frac{p_n(\mu;\,\cdot\,)}{\alpha_n}\right\|_{L^2(\mu)}\leqslant\frac{\sqrt{m}}{\alpha_n}. \tag{27}$$

С другой стороны,

$$\left\|\frac{p_n(\mu;\,\cdot\,)}{\alpha_n}\right\|_{K_m}\geqslant\inf_{p\in\Pi_{n-1}}\|z^n-p\|_{K_m} = t_{nK_m}, \tag{28}$$

где t_{nK_m} – постоянная Чебышева компакта K_m. Так как

$$\lim_{n\to\infty}(t_{nK_m})^{1/n} = \operatorname{cap}K_m,$$

то (27) и (28) вместе дают оценку

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{m}}{\alpha_n}\right) = \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^{1/n}\geqslant\operatorname{cap}(K_m).$$

Переходя в неравенстве

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\geqslant\operatorname{cap}(K_m)$$

к пределу при $m\to\infty$, в силу (23) получаем заключение импликации (26).

Доказательство следствия 1. Так как [15, глава 3, следствие 3.1.1]

$$\liminf_{n\to\infty}(\alpha_n)^{1/n} \geqslant \frac{1}{\operatorname{cap} S_\mu},$$

в силу (22) из нерегулярности μ следует, что

$$\liminf_{n\to\infty}(\alpha_n)^{1/n} > \frac{1}{\operatorname{cap} S_\mu}.$$

Последнее неравенство в силу (11) эквивалентно (9).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Szegö G. Beitzöge zur Theorie der Toeplitzschen Formen I // Math. Z. 1920. V. 6. P. 167–202.
[2] Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1941. Т. 5. С. 3–4.
[3] Крейн М. Г. Об одном обобщении исследований G. Szegö, В. И. Смирнова и А. Н. Колмогорова // Докл. АН СССР. 1945. Т. 46. С. 95–98.
[4] Thomson J. Approximation in the mean by polynomials // Ann. of Math. 1991. V. 133. P. 477–507.
[5] Thomson J. Bounded point evaluation and polynomial approximation // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123. P. 1757–1761.
[6] Akeroyd J. An extension of Szegö's theorem // Indiana Univ. Math. J. 1994. V. 43. P. 1339–1347.
[7] Akeroyd J. An extension of Szegö's theorem II // Indiana Univ. Math. J. 1996. V. 45. P. 241–252.
[8] Akeroyd J., Saleeby E. G. On polynomials approximation in the mean // Contemprary Math. 1999. V. 232. P. 23–26.
[9] Akeroyd J., Saleeby E. G. A class $P^t(d\mu)$ spaces whole point evaluations vary with t // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. V. 127. P. 537–542.
[10] Conway J. B. Subnormal Operators. Boston: Pitman, 1981.
[11] Вольберг А. Л. Среднеквадратическая полнота многочленов за пределами теоремы Сегё // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241. С. 521–527.
[12] Trent T. Extension of the theorem of Szegö // Michigan Math. J. 1979. V. 26. P. 373–377.
[13] Browder A. Introduction to function algebras. New York–Amsterdam: W. A. Benjamin, 1969.
[14] Helson H., Lowdenslager D. Prediction theory and Fourier series in several variables // Acta Math. 1958. V. 99. P. 165–202.
[15] Stahl H., Totik V. General Orthogonal Polynomials. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
[16] Гамелин Т. Равномерные алгебры. М.: Мир, 1969.
[17] Philip J. D. Interpolation and Approximation. New York–Toronto–London: Blaisdell Publ. Co., 1963.
[18] Витушкин А. Г. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // УМН. 1967. Т. 22. №6. С. 141–199.
[19] Donald L. C. Measure Theory. Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 1993.
[20] Ullman J. L. On the regular behavior of orthogonal polynomials // Proc. London Math. Soc. 1972. V. 24. P. 119–148.
[21] Rudin W. Functional Analysis. 2nd edition. Singapore: McGaw-Hill, 1991.
[22] Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. Т. 1. М.: Мир, 1980.

(Ф. Г. Абдуллаев) Mersin University, Mersin, Turkey
(А. А. Довгошей) Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, Украина
E-mail: `fabdul@mersin.edu.tr, dovgoshey@iamm.ac.donetsk.ua`

Поступило
26.09.2002